Universidade Federal de Santa Catarina

Edson Ribeiro dos Santos

Um Estudo Introdutório às Equações Diferenciais Ordinárias

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

2003

Esta Monografia foi julgada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria no. 15/SCG/04.

Profa. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Ruy Coimbra Charão
Orientador

Prof. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Prof. Joel Santos Souza

Sumário

Introdução

As equações diferenciais formam um importante ramo da Matemática. Essas equações têm aplicações nas mais diversas áreas da Ciência, como, por exemplo, na Engenharia, na Química, na Biologia, na Ecologia, na Economia, entre outras. Na Física, por exemplo, elas são usadas para estudar fenômenos de acústica e de ondas eletromagnéticas. Na engenharia elas aparecem por exemplo em problemas de vibrações, de escoamentos de fluidos, etc...

Atualmente, os problemas envolvendo equações diferenciais são estudados por grandes matemáticos, e constituem um vasto campo de trabalho. Alguns dos problemas práticos encontrados no cotidiano são modelados através de equações diferenciais (ordinárias ou parciais). Além disso, existem problemas envolvendo equações diferenciais que ainda se encontram em aberto.

Neste trabalho, tratamos apenas das equações diferenciais ordinárias, pois este assunto é, por si só, muito abrangente. A seguir, apresentamos um resumo do que será visto nesta monografia.

No Capítulo 1 deste trabalho, definimos o que é uma Equação Diferencial (Ordinária e Parcial) e damos alguns exemplos práticos, e de equações famosas.No entanto, apesar de mencionarmos as equações diferenciais parciais, este trabalho limitar-se-á às equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 2, falamos sobre as EDO's de primeira ordem, do problema de Cauchy ou problema de valor inicial (PVI) e comentamos a existência e unicidade de soluções para os PVI's, incluindo exemplos onde não são satisfeitas as condições do teorema de existência e unicidade. Nesses casos, podemos ter uma solução única, várias soluções (até mesmo infinitas) ou nenhuma solução.

No Capítulo 3, mostramos alguns métodos de resolução para tipos especiais de equações diferenciais ordinárias, como por exemplo o método de variáveis separáveis, fator integrante, equações diferenciais exatas, equações lineares e homogêneas de primeira ordem, e equações de segunda ordem redutíveis.

No Capítulo 4, tratamos sobre sistemas lineares de equações diferenciais (homogêneos e não homogêneos) e suas propriedades. Comentamos também a existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 5, finalmente, demonstramos o teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, no caso escalar e no caso vetorial. Além disso, estão incluidas as definições de ponto fixo e espaço métrico e os lemas necessários para a demonstração do teorema de existência e unicidade, como o princípio da contração.

1 Equações Diferenciais e Problemas Associados

Aqui, daremos a definição de equação diferencial e mostraremos os tipos principais de equações diferenciais que podem aparecer.

1.1 Definições

Em palavras simples, uma equação diferencial é uma equação envolvendo uma função e suas derivadas.

Existem dois tipos principais de Equações Diferenciais:

1) Equação diferencial ordinária (EDO): Quando a função envolvida é de uma variável.

2) Equação diferencial parcial (EDP): Quando a função envolvida depende de várias variáveis.

Neste trabalho, todas as variáveis envolvidas serão reais e as funções, em geral, também serão reais. Considera-se também neste trabalho que noções de cálculo diferencial e integral são um assunto conhecido.

Alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias são:

a) $y'' + 2y + 3x^2 = 0$, $y = y(x)$.

b) $y' = \sin y + 2xy$, $y = y(x)$.

c) $y' + 3xy'' - 2y^2 + 1 = 0$, $y = y(x)$.

d) $y' + \sqrt{2y + y'} + y = 0$, $y = y(x)$.

Alguns tipos de equações diferenciais parciais são:

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $u = u(t, x)$ (equação do calor)

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y)u^2 = 0$, $u = u(x, y)$ (equação de Laplace)

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + mu = \sin u$, $u = u(t, x)$ (equação da onda)

Em geral, uma **equação diferencial ordinária** (EDO) envolvendo uma função $y = f(t)$ é uma equação da forma:

$$F(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0,$$

sendo $F(t, x_0, \ldots, x_n)$ alguma função. Se F não for constante na variável x_n, diz-se que a EDO tem ordem n.

Analogamente, uma EDP para uma função $u = u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é uma equação da forma

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0$$

para alguma função F. Se F não for constante em alguma das variáveis correspondentes às derivadas de ordem m, diz-se que m é a ordem da EDP.

As Equações Diferenciais podem ser classificadas como:

1) **Lineares**: Quando a função F é linear nas suas variáveis que envolvem a função incógnita.

2) **Não Linear**: Quando F é não linear em alguma das variáveis que envolvem a função incógnita.

Parte principal da Equação Diferencial: É a parte da equação que envolve os termos com derivadas de ordem mais alta, isto é, aqueles que dão a ordem da equação diferencial.

Equação Semi-Linear: Quando a parte principal é linear.

Equação Homogênea: Um modo simples de definir equação diferencial homogênea é dizer que a função nula é solução.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar EDO's (ou sistemas de EDO's) da forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Fazemos isso para evitar o problema que pode ocorrer devido a que uma equação da forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

pode corresponder a diversas equações da forma (1).

Por exemplo, a equação $F(x, y, y') = {y'}^2 + 4xy' + 2y = 0$ leva para as duas equações:

$$y' = \frac{-4x + \sqrt{16x^2 - 8y}}{2}$$

e

$$y' = \frac{-4x - \sqrt{16x^2 - 8y}}{2}$$

as quais são EDO's do tipo $y' = f(x, y)$.

Definição de Solução: *U*ma solução da EDO (1) sobre um intervalo $I = (a, b)$ é uma função ϕ tal que $\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)}$ existem em I e satisfazem

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in I$$

Exemplos:

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

1) Para circuitos elétricos:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{c}Q(t) = E(t)$$

onde:

$Q(t)$ (carga sobre o condensador) é a função incógnita, e são dados conhecidos:

$C =$ capacitância;

$R =$ resistência;

$L =$indutância;

$E(t) =$ voltagem.

2) Decaimento de uma amostra radioativa no tempo:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t)$$

$R(t) =$ quantidade de amostra radioativa;

$t =$ tempo;

$k =$ constante conhecida.

3) Equação Predador-Presa (Lotka-Volterra):

É um modelo importante em modelagem ecológica.

$$\begin{cases} H'(t) = aH(t) - \alpha H(t)P(t) \\ P'(t) = -cP(t) + \gamma H(t)P(t) \end{cases}$$

$H(t) =$ população de presas;

$P(t) =$ população de predadores.

a, α, c e γ são constantes que dependem sobre observações empíricas e as particulares espécies que se está estudando.

4) Oscilações de um Pêndulo (sem amortecimento):

$$\frac{d^2(\theta)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \theta = \theta(t)$$

Esta é uma EDO não linear.

Para pequenas oscilações, $\theta = \theta(t)$, $\sin\theta \approx \theta$. Nesse caso, se pode trabalhar com a EDO linearizada

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Observação:

Na dedução desse modelo para o pêndulo, considera-se:

- corda sem massa

- atrito do ar desprezado

g = gravidade;

l = comprimento do pêndulo;

$\theta(t)$ = deslocamento angular do pêndulo.

Exemplo 1: Outras aplicações Uma pessoa possuidora de certos bens tem uma fortuna que cresce a uma taxa proporcional ao quadrado de sua fortuna. Um ano antes ($t = 0$) sua fortuna era de 1 milhão. Hoje é de 2 milhões.

Qual será sua fortuna daqui a 6 meses?

E perto do próximo 1 ano?

Solução: Considerar uma função $y = y(t)$ como sendo a fortuna da pessoa, sendo t o tempo. Claro que a taxa de variação da fortuna é dada por $y'(t)$.

Então, $y(t)$ deve satisfazer o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky^2 \\ y(0) = 1; y(1) = 2 \end{cases}$$

sendo k a constante de proporcionalidade.

É fácil ver que a função $y(t) = \frac{1}{c-kt}$ é solução da EDO em consideração. Agora, aplicando as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y(1) = 2$ temos:

$$1 = y(0) = \frac{1}{c}$$

Isso diz que $c = 1$. Aplicando a condição que a fortuna atual é de 2 milhões, temos:

$$2 = y(1) = \frac{1}{1-k}$$

Então, $k = \frac{1}{2}$.

Logo, concluimos que a solução do problema é

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{2}{2-t}, t \geq 0.$$

Portanto:

$$y(1+\frac{1}{2}) = y(\frac{3}{2}) = 4$$

$$\lim_{t \to 2^-} y(t) = +\infty.$$

A conclusão é que a fortuna será de 4 milhões daqui a 6 meses e se tornará infinita daqui a um ano, se isso fosse possível. Claro, isso ocorre porque o modelo descrito na prática é impossível de ocorrer.

Exemplo 2: Resfriamento de Newton

Este modelo trata sobre o resfriamento de um corpo físico qualquer (um bloco de gelo, uma placa de ferro, etc...)

Considere-se

$T(t)$ = temperatura do corpo

t = tempo

A = temperatura do ambiente em volta

Então Newton propõe o seguinte modelo para descrever $T(t)$:

$$\frac{dT}{dt} = K(A - T)$$

Sendo k alguma constante positiva, que depende do material do corpo.

A solução dessa EDO é dada por:

$$T(t) = (c - A)e^{-Kt} + A$$

com c alguma constante. Esse modelo tem aplicações até em "criminologia".

1.2 Equações Diferenciais Parciais famosas:

Algumas equações diferenciais parciais famosas de física-matemática são:

1) $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + mu + u^3 = 0$$

com a uma constante real positiva.

Esta equação é uma equação unidimensional semi-linear de onda e é conhecida como a equação de Klein-Gordon da mecânica relativística, sendo m a massa da partícula.

2) $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$,

$$u_t - ku_{xx} + q(x,t)u = f(x,t)$$

Equação unidimensional do calor não homogênea, sento $k \in \mathbb{R}^+$ uma constante.

3) $u = u(x,y,t)$ tal que:

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t,u)$$

com $u(x,t)$ definida na região $x^2 + y^2 < 1$, $t > 0$. Esta é uma equação da onda bidimensional.

4) $u = u(x,y,t)$:

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$t > 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Equação do calor em uma placa quadrada.

5) $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$,

$$u_{tt} + u_{xxxx} + mu = f(x,t)$$

Equação unidimensional da viga.

6) $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$,

$$u_t - u_{xxx} - uu_x = 0$$

Equação semi-linear de ondas de água em um canal, também chamada de equação de Kortaveg de Vries (KdV).

7) $u = u(x, y)$, $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

Essa equação é conhecida como a Equação de Poisson em $\mathbb{R}^2$. Se $f \equiv 0$ ela é chamada a equação de Laplace.

Neste trabalho trataremos apenas de um estudo introdutório às equações diferenciais ordinárias. Somente o estudo dessas equações é muito vasto, abrangendo uma enorme bibliografia, e desse modo seria praticamente impossível abordar aqui alguma coisa sobre as equações diferenciais parciais, para as quais também existe uma vasta bibliografia a respeito.

Atualmente uma grande quantidade de matemáticos se dedica ao estudo das equações diferenciais (ordinárias e parciais) e existem muitos problemas em aberto nessa área, e a cada dia surgem muitos outros.

2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo apresentamos diversos problemas relacionados com equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Mostramos alguns exemplos de aplicação e suas soluções. São também mostrados problemas com muitas soluções. Discutimos o problema de existência e unicidade de soluções, sem apresentar prova do teorema relacionado, o que é feito no último capítulo.

Notação: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(t, x)/t, x \in \mathbb{R}\}$

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

A equação:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

ou $x' = f(t, x)$ é chamada equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, para a função $x = x(t)$, associada à função f.

Observação 1: $x = x(t)$ é a função incógnita para esta EDO.

Observação 2: A equação (3) também se escreve como $\dot{x} = f(t, x)$.

Definição de solução: Uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, com I = intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$, chama-se solução da EDO (3) se:

(a) $(t, \phi(t)) \in D, \forall t \in I$

(b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \forall t \in I.$

Campo de Direções: A função $f(t, x)$ define um campo de direções dado por $(1, f(t, x))$ em D.

Tem-se que:

$\phi(t)$ é solução de $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \Leftrightarrow$ o vetor $(1, f(t, \phi(t))$ é tangente ao gráfico de $\phi(t)$ no ponto $(t, \phi(t))$.

Exemplos:

1) $a \in \mathbb{R}$, $\dot{x} = ax = f(t, x)$, $D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = ax$

   Solução é: $\phi(t) = ce^{at}$ definida em $\mathbb{R}$ onde c é uma constante real.

   De fato, temos que:

$$\phi'(t) = cae^{at} = a.ce^{at} = a\phi(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

2) $\dot{x} = x^2$, $f(t,x) = x^2$, $D = \mathbb{R}^2$. Seja c uma constante real.

Note que $\phi_c(t) = \frac{1}{c-t}$ é solução definida em $I = (c, +\infty)$ ou $I = (-\infty, c)$, pois:

$$\phi_c'(t) = \frac{1}{(c-t)^2} = \left(\frac{1}{c-t}\right)^2 = (\phi_c(t))^2, \forall t > c \text{ ou } \forall t < c$$

Observação 2: $\phi(t) = 0$ também é solução em $I = \mathbb{R}$.

3) $\dot{x} = f(t,x) = 3x^{2/3}$, $D = \mathbb{R}^2$.

Afirmamos que a função

$$\phi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3 & , \quad t \geq c \\ 0 & , \quad t < c \end{cases}$$

é solução definida em $I = \mathbb{R}$, sendo c uma constante real fixa.

Precisamos verificar a diferenciabilidade de $\phi_c(t)$. O problema é verificar a diferenciabilidade em $t = c$. Temos

$$\phi_c'(c)^+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{\phi_c(c+h) - \phi_c(c)}{h} = 0$$

$$\phi_c'(c)^- = \lim_{h \to 0^-} \frac{\phi_c(c+h) - \phi_c(c)}{h} = 0$$

Logo, existe $\phi_c'(c)$ e $\phi_c'(c) = 0$.

Agora verificamos que $\phi_c(t)$ é solução em $I = \mathbb{R}$.

Para $t > c$, temos

$$\phi_c(t) = (t-c)^3 \text{ então } \phi_c'(t) = 3(t-c)^2 = 3[\phi_c(t)]^{2/3}$$

Assim $\phi_c(t)$ é solução se $t > c$.

Para $t \leq c$, temos que

$$\phi_c = 0 \text{ e } \phi_c'(t) = 0 = 3(\phi_c(t))^{2/3}$$

Logo, $\phi_c(t)$ é solução se $t \leq c$.

Conclusão:

$$\phi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3 & , \quad t \geq c \\ 0 & , \quad t < c \end{cases}$$

é solução da EDO dada em $I = \mathbb{R}$.

Notar que $\phi(t) = 0$ é também uma solução em $I = \mathbb{R}$. Assim, esta EDO admite infinitas soluções.

4) Estudar o campo de direções para

$$(\star) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{3-x}{2}$$

Aqui, temos $f(t,x) = \frac{3-x}{2}$ e $D = \mathbb{R}^2$.

Na EDO $(\star)$, $f(t,x) = f(x)$, isto é, f é independente de t. Neste caso, a inclinação do gráfico de $x(t)$, ou o segmento dos campos de direções tem mesma inclinação ao longo de retas $x =$constante, por exemplo ao longo da reta $x = 2$, temos

$$\dot{x} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

Ao longo da reta $x = 3$ temos $\dot{x}(t) = 0$. Ao longo de $x = 4$ temos $\dot{x} = -\frac{1}{2}$.

O conhecimento do campo de direções pode fornecer informações a respeito do comportamento das soluções.

5) Considere a equação diferencial de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = e^{-t} - 2x$

Aqui, $f(t,x) = e^{-t} - 2x$ depende de t e x então o campo de direções é mais complicado.

6) A seguinte equação diferencial de primeira ordem claramente não possui soluções reais:

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| + |x| + 1 = 0$$

7) A equação diferencial ordinária $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 4x = 0$ tem uma família a um parâmetro de soluções da forma $f_c(t) = (t+c)^2$, $c =$ constante real, mais a solução "extra"$g(t) = 0$, que não é membro da família $\{f_c\}$ para qualquer escolha de c.

8) **Velocidade de escape da Terra**

Um foguete é disparado para cima com velocidade inicial v_0 e depois disso se move sem posterior gasto de energia. Para valores grandes de v_0 ele sobe bastante antes de chegar ao repouso e cair de volta à Terra. Qual deve ser v_0 para que o foguete jamais chegue ao repouso e assim escape completamente da atração gravitacional da Terra?

Solução: Usaremos a Lei de Gravitação de Newton.

> "Duas partículas quaisquer de matéria no universo se atraem com uma força que é conjuntamente proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas"

Seja m a massa do foguete e a sua aceleração. Seja s a distância do foguete ao centro da Terra e M a massa da Terra.

A segunda lei de Newton diz: $F = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$. Então

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -K\frac{Mm}{s^2}\,(m \neq 0),$$

isto é,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{KM}{s^2}$$

Isso diz que o foguete não depende da própria massa.

Notamos que se

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

então:

$$-g = -\frac{KM}{s^2}$$

Assim, $KM = gR^2$.

Logo, a equação do movimento é:

$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{R^2}{s^2}$ ou $\frac{dv}{dt} = -g\frac{R^2}{s^2}$ onde $v = v(t)$ é a velocidade do foguete, isto é, $v(t) = \frac{ds}{dt}$ e $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = -g$.

No nosso problema, a força F que atrai o foguete para a Terra é dada então por:

$$F = -\frac{KMm}{s^2}$$

onde k é uma constante.

Claro que $s = s(t)$, sendo t o tempo. Se $v = v(t)$ é a velocidade do foguete, então, pela regra da cadeia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Desse modo,

$$\frac{dv}{ds}v = -g\frac{R^2}{s^2}.$$

Separando variáveis, temos que:

$$vdv = -gR^2\frac{ds}{s^2}$$

Integrando, obtém-se:

$$\frac{v^2}{2} = gR^2 \cdot \frac{1}{s} + c$$

sendo c uma constante. Para achar c fazemos $v = v_0$ quando $s = R$. Tem-se

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gR^2\frac{1}{R} + c \Rightarrow c = \frac{v_0^2}{2} - gR \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{s} + \frac{v_0^2}{2} - gR.$$

É claro que para escapar da Terra deve-se ter $v(t) > 0, \forall t$.

Quando s é suficientemente grande, tem-se que $\frac{gR^2}{s} \rightarrow 0$ e com isso é preciso que

$$\frac{v_0^2}{2} - gR > 0$$

Isto é, é necessário que $v_0 > \sqrt{2gR}$ para que esse foguete escape da atração gravitacional da Terra.

2.1 Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial

Seja $f(t,x) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja $(t_0, x_0) \in D$. O problema de valor inicial (PVI) para a equação:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

com dado inicial (t_0, x_0) consiste em achar uma solução $\phi(t)$ definida em algum intervalo I contendo t_0, de modo que

$$\phi(t_0) = x_0.$$

Resumindo, o problema de Cauchy para uma EDO de Primeira Ordem consiste em achar uma solução de:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), t \in I \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Exemplo 1: Achar uma solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x \\ x(1) &= 5 \end{cases}$$

Aqui, $f(t,x) = 2x$ e $D = \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) = (1, 5)$.

Solução: Para resolver esse PVI, notamos que a equação

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2x$$

pode ser colocada na forma

$$\frac{dx}{x} = 2dt.$$

Daí, integrando obtém-se

$$ln|x| = 2t + c$$

com c alguma constante. Assim,

$$|x| = e^{2t+c}$$

e portanto a solução deve ser da forma:

$$x = x(t) = Ke^{2t}$$

onde $K = \pm e^c = \pm c$

Impondo a condição inicial, temos: $5 = x(1) = Ke^{2\cdot 1} \Rightarrow K = 5e^{-2}$ e com isso

$$x(t) = 5e^{2(t-1)}$$

Essa é a única solução desse PVI e a solução é definida em $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Achar uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{x^2-1}{2} \\ x(2) &= 0 \end{cases}$$

Aqui, $f(t,x) = \frac{x^2-1}{2}$, $D = \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) = (2,0) \in D$.

Solução: Observamos que

$$\phi(t) = \frac{1+ce^t}{1-ce^t},$$

c uma constante, é solução da EDO.

Aplicando a condição inicial:

$$0 = \phi(2) = \frac{1+ce^2}{1-ce^2} \Rightarrow 1 + ce^2 = 0 \Rightarrow c = -e^{-2}$$

e com isso a solução é dada por

$$\phi(t) = \frac{1-e^{t-2}}{1+e^{t-2}}, \quad t \in I = \mathbb{R}$$

Observamos que esta é a única solução desse PVI.

Exemplo 3: Mostrar que o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x^{2/3} \\ x(1) &= 0 \end{cases}$$

possui infinitas soluções.

Solução: Vimos que as funções

$$\phi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3 & , \quad t \geq c \\ 0 & , \quad t < c \end{cases}$$

são soluções da EDO deste exemplo.

Note que se $c \geq 1$ então $\phi_c(1) = 0$ pela definição de $\phi_c(t)$.

Assim, ϕ_c, $c \geq 1$ é solução do PVI.

Note também que a função $\phi \equiv 0$ também é solução e é um membro "estranho" à família de soluções $\{\phi_c\}$, $c \geq 1$. Ainda, a função $\phi(t) = (t-1)^3$ também é solução deste PVI.

Assim para cada constante $c \geq 1$ existe uma solução e portanto o número de soluções é infinito.

Questão: Porque os PVI's dos exemplos 1 e 2 têm unicidade e no exemplo 3 não?

A resposta é porque no exemplo 1, $f(t,x)$ é uma função diferenciável, no exemplo 2 também, mas no exemplo 3 a função $f(t,x) = 3x^{2/3}$ não é diferenciável em $x = 0$.

2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, D domínio de $\mathbb{R}^2$, uma função.
Considere o PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

com $(x_0, t_0) \in D$.
Afirmações:
Se a função é contínua, então:

I) O problema 4 possui pelo menos uma solução definida em algum intervalo I contendo t_0 (Teorema de Peano).

II) O problema 4 pode ter mais de uma solução.

III) Uma condição suficiente para que o problema 4 possua uma única solução definida em algum intervalo I contendo t_0 é que $f(t,x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ sejam contínuas em D.

IV) Se $f(t,x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ são contínuas em D, então a solução única de 4 está definida para todo intervalo I contendo t_0, para o qual $(t, \phi(t)) \in D$, $t \in I$. (Solução Global)

Observações:

1) Nas condições em (III) existe uma solução de 4 definida em algum intervalo I contendo t_0 e, se $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são soluções de 4 então $\phi = \psi$ no intervalo comum de definição.

2) A condição (III) pode ser substituida por $f(t,x)$ contínua em D e Lipschitziana em D relativamente à segunda variável, isto é, que existe $K > 0$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y|,$$

$\forall (t,x), (t,y) \in D$.

Aplicações:

A seguir, apresentamos alguns exemplos de PVI onde as hipóteses para existência e unicidade podem ou não ser válidas. Neste caso, a existência e/ou unicidade podem ou não falhar.

Exemplo 1)

Neste exemplo, considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a uma constante real. Aqui, $D = \mathbb{R}^2$ e $f(t,x) = ax$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ são contínuas.

Pelo teorema de existência e unicidade existe (afirmação (III)) uma única solução do PVI a qual é dada por:

$$\phi(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$$

definida em $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 2) Mostrar que $\phi(t) = -\frac{1}{t}$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

Aqui, $f(t,x) = x^2, D = \mathbb{R}^2$.

Agora, é claro que $\phi(t)$ é solução, pois, $\phi'(t) = \frac{1}{t^2} = \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \left(-\frac{1}{t}\right)^2 = (\phi(t))^2$, $\forall t \neq 0$.

Note que $t = 0 \notin I$.

Notar também que $\phi(-1) = -\frac{1}{t}\Big|_{t=-1} = 1 \Rightarrow \phi(t)$ é solução do PVI $\forall t \neq 0$, isto é, para $t \in (0,\infty)$ ou $(-\infty,0)$. Agora, note que $t = -1 \in (-\infty,0)$. Assim, $\phi(t)$ é solução em $I = (-\infty,0)$.

A equação nesse PVI é da forma $\dot{x} = f(t,x)$ com $f(t,x) = x^2$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ é contínua. Como $f(t,x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas então pelo teorema existe uma única solução para o PVI dado e é dada por $\phi(t) = -\frac{1}{t}$.

No entanto, é impossível estender $\phi(t)$ continuamente ao intervalo $(-\infty,0]$, ou, por exemplo, ao intervalo $(-\infty,2)$.

Exemplo 3)

Neste exemplo, considere o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Aqui, $f(t,x) = 3x^{2/3}$ é contínua, mas $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ não é contínua em 0 e, pelo teorema, não se pode garantir a existência e unicidade do PVI dado para $x_0 = 0$.

Se $x_0 \neq 0$ então existe solução única do PVI em algum intervalo I contendo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4)

Achar uma solução de:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(t_0) = x_0, \qquad x_0 > 0 \end{cases}$$

Qual o intervalo máximo de definição da solução encontrada?

Note que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe em pontos da forma $(t, 0)$.

Solução: $\dot{x} = 3x^{2/3}$ tem como solução

$$\phi(t) = \begin{cases} (t-c)^3 & , \ t \geq c \\ 0 & , \ t < c \end{cases}$$

ou $\psi(t) = (t-c)^3$, $\forall t$, para c uma constante. Aplicando a condição inicial,

$$x_0 = \phi(t_0) = \begin{cases} (t_0-c)^3 & , \ t_0 \geq c \\ 0 & , \ t_0 < c \end{cases}$$

Resulta que $c = t_0 - \sqrt[3]{x_0}$. Portanto,

$$\phi(t) = \begin{cases} (t - t_0 - \sqrt[3]{x_0})^3 & , \ t \geq t_0 - \sqrt[3]{x_0} \\ 0 & , \ t < t_0 - \sqrt[3]{x_0} \end{cases}$$

e também

$\psi(t) = (t - t_0 - \sqrt[3]{x_0})^3 \, \forall t \Rightarrow$ são soluções. Logo, concluimos que a unicidade somente é válida no intervalo $I = [t_0 - \sqrt[3]{x_0}, +\infty)$.

Exemplo 5)

A equação $\dot{x} = (x^2-1)^{1/2}$ possui solução única passando pelo ponto $(-1, 5)$? E pelo ponto $(2, 0)$? E pelo ponto $(1, 1)$?

Solução:

$\dot{x} = (x^2-1)^{1/2} = f(t, x)$. Então $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$.

Assim, devemos trabalhar esse PVI em

$D_1 = \mathbb{R} \times [1, \infty)$ ou $D_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, -1]$.

Agora, vemos que

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ e portanto $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas no interior de D_1 e D_2. Logo, como $(-1, 5) \in int(D_1)$, concluimos que existe solução única passando por $(-1, 5)$.

O ponto $(1, 1) \notin D_1$, isto é, $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe em $(1, 1)$. Portanto, não vale a hipótese sobre f na afirmação (III). Logo, não se pode afirmar que existe única solução passando pelo ponto $(1, 1)$. O ponto $(2, 0) \notin D_1 U D_2$.

3 Resolução de Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo estudaremos alguns tipos especiais de equações diferenciais ordinárias e seus respectivos métodos de resolução.

3.1 Equações Com Variáveis Separáveis

Uma equação diferencial da forma $\dot{x} = f(t, x)$ é uma equação de variáveis separáveis se $f(t, x)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(t, x) = g(t) \cdot h(x),$$

para $(x, t) \in \mathrm{dom} f$.

Exemplos:

a) $\dot{x} = x^2$. Neste caso, $h(x) = x^2$ e $g(t) \equiv 1$.

b) $\dot{x} = \frac{x}{1+t^2}$. Aqui temos $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ e $h(x) = x$.

c) $\dot{x} = e^{t+x}$, onde $g(t) = e^t$ e $h(x) = e^x$.

Equações que não são de variáveis separáveis, são por exemplo:

a) $\dot{x} = \sin t - 2tx$

b) $\dot{x} = \sin(t^2x^3)$

c) $\dot{x} = \ln(x^2 + t^2)$

3.2 Método para Resolução de Equações com Variáveis Separáveis

Agora vamos especificar a técnica ou método de resolução de equações diferenciais ordinárias com variáveis separáveis.

Neste tipo de equação temos que x é uma função de t, ou seja, $x = x(t)$. Com isso, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, daí segue que:

$$\dot{x} = g(t) \cdot h(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x).$$

Considerando $h(x) \neq 0$ em algum intervalo podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt$$

Integrando ambos os lados chega-se na solução da EDO dada.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x^2 \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Aqui temos $g(t) = 1$ e $h(x) = x^2$, caracterizando uma EDO separável.

Seja $\phi = \phi(t)$ solução do PVI em algum intervalo I. Então:

$$\begin{cases} \phi'(t) & = & \phi(t)^2, \forall t \in I \\ \phi(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Supondo $\phi(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ temos

$$\frac{\phi'(t)}{[\phi(t)]^2} = 1 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{[\phi(s)]^2} ds = \int_{t_0}^{t} ds \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{[\phi(s)]^2} ds = t - t_0$$

fazendo $\phi(s) = u$ temos $\phi'(s) = u'$, isto é: $\phi'(s)ds = du$.

Notar que

$$\begin{cases} s = t & \Rightarrow & u = \phi(t) \\ t_0 = s & \Rightarrow & u = x_0 \end{cases}$$

e com isso a integral fica

$$\int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{du}{u^2} = t - t_0 \Rightarrow -\frac{1}{\phi(t)} + \frac{1}{x_0} = t - t_0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\phi(t)} = \frac{1}{x_0} - t - t_0 \Rightarrow \phi(t) = \frac{x_0}{x_0(-t + t_0) + 1} \Rightarrow \phi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

Note que $\phi(t)$ não está definida para t tal que $1 - x_0(t - t_0) = 0$, isto é, $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$.

Assim,

$I = (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0})$, se $x_0 > 0$

$I = (t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty)$, se $x_0 < 0$

Observação: Soluções de $\dot{x} = x^2$ podem ser obtidas usando-se integrais indefinidas.

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x} = t + c \Rightarrow -x = \frac{1}{t+c} \Rightarrow x = -\frac{1}{t+c} = \frac{1}{c-t}$$

para $\phi(t_0) = x_0 \neq 0$ deve-se ter

$$x = \phi(t) = \frac{1}{c-t} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{c-t_0} \Rightarrow x_0 c - x_0 t_0 = 1 \Rightarrow$$

$$c x_0 = 1 + x_0 t_0 \Rightarrow c = \frac{1}{x_0} + t_0$$

e com isso

$$\phi(t) = \frac{1}{c-t} = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t} = \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)}$$

e portanto:

$$\phi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

exatamente onde tínhamos chegado antes!

Exemplo 2: Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & tx^3 \\ x(0) & = & 1 \end{cases}$$

Seja $\phi(t)$ solução definida em I.

$$\begin{cases} \phi'(t) & = & t(\phi(t))^3 \\ \phi(0) & = & 1 \end{cases}$$

Considerando $\phi(t) \neq 0 \ \forall t \in I$, temos

$$\frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^3} = t \Rightarrow \int_0^t \frac{\phi'(s)}{(\phi(s))^3} ds = \int_0^t s ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\phi'(s)}{(\phi(s))^3} ds = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

Fazendo $u = \phi(t), u' = \phi'(t)$, temos

$$\int_1^{\phi(t)} \frac{du}{u^3} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \left. \frac{u^{-2}}{-2} \right|_1^{\phi(t)} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{(\phi(t))^{-2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{-1}{\cancel{2}(\phi(t))^2} = \frac{t^2-1}{\cancel{2}} \Rightarrow -(\phi(t))^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow$$

$$(\phi(t))^2 = \frac{1}{1-t^2} \Rightarrow \phi(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$$

para $t \in (-1, 1)$.

Como queremos $\phi(0) = 1$, temos que ter $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ \ \forall\, t \in (-1, 1)$.

Observação: Se quisesse a solução $\phi(t)$ tal que $\phi(0) = -1$, então deveríamos tomar

$$\phi(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Exemplo 3: Neste exemplo consideramos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x^{2/3} \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Queremos aqui achar I_0, intervalo máximo de definição de uma solução.

Seja $\phi(t)$ solução definida em I.

$$\begin{cases} \phi'(t) &= 3(\phi(t))^{2/3} \\ \phi(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Supondo $\phi(t) \neq 0\ \forall t \in I$, temos:

$$\frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^{2/3}} = 3 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{(\phi(s))^{2/3}} ds = \int_{t_0}^{t} 3ds \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{(\phi(s))^{2/3}} ds = 3(t-t_0)$$

Fazendo $\phi(s) = u \Rightarrow \phi'(s)ds = du$ e com isso:

$$\begin{matrix} s = t & \Rightarrow & \phi(t) = u \\ s = t_0 & \Rightarrow & u = x_0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{du}{u^{2/3}} = 3(t-t_0) \Rightarrow$$

$$3[(\phi(t))^{1/3} - {x_0}^{1/3}] = 3(t-t_0) \Rightarrow$$

$$\phi(t)^{1/3} - {x_0}^{1/3} = t - t_0 \Rightarrow$$

$$\phi(t)^{1/3} = t - t_0 + \sqrt[3]{x_0} \Rightarrow \phi(t) = (t + (\sqrt[3]{x_0} - t_0))^3$$

Com isso, vemos que $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 4: Aqui, consideramos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} & = & 2\sqrt{x} \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Seja $\phi(t)$ solução do PVI para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{cases} \phi'(t) & = & 2\sqrt{\phi(t)} \\ \phi(t_0) & = & x_0, \qquad x_0 \geq 0. \end{cases}$$

Supondo $\phi(t) \neq 0\ \forall t \in I$, temos que $\phi'(t) = 2\sqrt{\phi(t)}$. Isto é, $\frac{\phi'(t)}{2\sqrt{\phi(t)}} = 1, \forall t \in I$.

Agora basta integrar ambos os lados do ponto da condição inicial até t, ou seja,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{2\sqrt{\phi(s)}} ds = t - t_0$$

Para integrar, faremos a seguinte mudança de variável:

Seja $\phi(s) = u$; com isso, $\phi'(s)ds = du$ e se $s = t$ temos $\phi(t) = u$, e se $s = t_0$ temos $u = \phi(t_0) = x_0$ e daí decorre que

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{2\sqrt{\phi(s)}} = \int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{du}{2\sqrt{u}} = t - t_0 \Rightarrow \sqrt{u}\Big|_{x_0}^{\phi(t)} = t - t_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\phi(t)} - \sqrt{x_0} = t - t_0 \Rightarrow \phi(t) = (t + (\sqrt{x_0} - t_0))^2$$

Para que $\phi(t)$ satisfaça a EDO dada, é simples verificar que nosso intervalo tem que ser $I = (t_0 - \sqrt{x_0}, \infty)$.

Exemplo 5:

Agora vamos achar, sem resolver, o intervalo I onde a solução está definida, para o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}\ln t + x & = & \operatorname{cotg} t \\ x(2) & = & 5 \end{cases} \quad (\text{cotg}t = \text{cotangente de t}).$$

Solução: Nossa equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{x} = \frac{\operatorname{cotg} t - x}{\ln t}$$

Note que

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{cotg} t - x}{\ln t}$$

somente está definida para $t > 0$, $t \neq 1$ e $t \neq \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

Como queremos que $x(2) = 5$, temos $t_0 = 2$ e $x_0 = 5$.

Sabemos que $1 < 2 < \pi$ com isso este intervalo $I = (1, \pi)$ satisfaz tanto a condição inicial quanto as condições de existência de f.

Observação: O problema genérico para uma equação separável é da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & g(t)h(x) \\ x(t_0) & = & x_0. \end{cases}$$

Esse problema tem única solução se (Teorema de Existência e Unicidade):

a) $g(t)$ é contínua em algum intervalo (a, b);

b) $h(x)$ e $h'(x)$ são contínuas em algum intervalo (c, d);

c) $h(x) \neq 0$ em (c, d).

A região do plano onde a equação acima está definida é em:

$$R = \{(t, x)/a < t < b, c < x < d\}.$$

Então tem-se que: $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em R onde $f(t, x) = g(t)h(x)$.

Assim, concluimos que um PVI para uma equação separável sempre admite única solução em I, intervalo contendo t_0, $t_0 \in \operatorname{dom} g$, $x_0 \in \operatorname{dom} h$, desde que h e g satisfaçam (a), (b) e (c).

Exemplo 6:

Achar a solução da seguinte equação diferencial ordinária com condição inicial $x(0) = 1$, e determinar o intervalo de validade I, onde $\dot{x} = e^{t-x}(1 + e^t)^{-1}$

Solução: Sendo $\phi(t)$ solução da equação dada temos:

$$\phi'(t) = \frac{e^{t-\phi(t)}}{1 + e^t} \Leftrightarrow \phi'(t)e^{\phi(t)} = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

Notamos que $\phi'(t)e^{\phi(t)} = [e^{\phi(t)}]'$ e, portanto,

$$[e^{\phi(t)}]' = \frac{e^t}{1 + e^t}.$$

Integrando em ambos os lados, temos que

$$e^{\phi(t)} = \int \frac{e^t}{1 + e^t} dt,$$

isto é,

$$e^{\phi(t)} = \ln|1+e^t| + c \Leftrightarrow \phi(t) = \ln(\ln|1+e^t| + c)$$

onde c é uma constante. Vamos achar esta constante impondo a condição inicial:

$$x(0) = 1 = \ln(\ln(1+1) + c) \Rightarrow 1 = \ln(\ln 2 + c) \Rightarrow e = \ln 2 + c \Rightarrow c = e - \ln 2.$$

Com isso nossa solução do problema dado é:

$$\phi(t) = \ln[\ln(1+e^t) + e - \ln 2]$$

Vamos agora avaliar o intervalo de validade para esta solução. Note que a função logarítmica só está definida para números positivos e, portanto, temos que ter $\ln(1+e^t) + e - \ln 2 > 0$. Agora, isso é verdade $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, o intervalo de validade da solução é $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 7:

a) A equação diferencial ordinária $\dot{x} = (x^2-1)^{1/2}$ possui solução passando por $(0,2)$?

E pelo ponto $(1,-5)$?

b) Achar as soluções acima pelo método de separação de variáveis. Determinar os intervalos de validade.

c) O que pode ser dito sobre soluções passando por (0,1)?

Solução:

a) $f(t,x) = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / x > 1 \text{ ou } x < -1\}$.

Como $f(t,x) = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Logo, f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em R.

Então pelo teorema de existência e unicidade, dado $(t_0,x_0) \in R$ existe única solução $\phi(t)$ passando por (t_0,x_0).

Observação: $(0,2)$ e $(1,-5) \in R$. Assim, a resposta para o item (a) é SIM.

b) Seja $\phi(t)$ solução da equação diferencial ordinária dada. Com isso

$$\phi'(t) = (\phi(t)^2 - 1)^{1/2}.$$

Dividindo ambos os lados por $(\phi(t)^2-1)^{1/2}$ temos:

$$\frac{\phi'(t)}{(\phi(t)^2-1)^{1/2}} = 1$$

Integrando,

$$\int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t)^2-1)^{1/2}}dt = \int dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t)^2-1)^{1/2}}dt = t+c$$

e fazendo $u=\phi(t)$, $du=\phi'(t)dt$ e com isso:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = t+c$$

Fazendo agora $u=\sec\theta \Rightarrow du=\sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta$ e a integral torna-se

$$\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta}d\theta = t+c \Rightarrow \int \sec\theta d\theta = t+c \Rightarrow \sec\theta + \operatorname{tg}\theta = Ce^t$$

onde $C=e^c$.

Mas $\sec\theta = u$ e $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{u^2-1}$, portanto:

$u+\sqrt{u^2-1}=Ce^t$. Mas $u=\phi(t)$ e com isso

$$\phi(t)+\sqrt{\phi(t)^2-1}=Ce^t$$

Esta solução só é válida se $|\phi(t)|\geq 1$.

c) Aqui, a equação diferencial é $\dot{x}=\sqrt{x^2-1}$ em $\overline{R}=\{(t,x)/x\leq 1 \text{ ou } x\geq -1\}$.

Notamos que o teorema de existência e unicidade não se aplica ao ponto $(0,1)\in\overline{R}$, pois sobre $\overline{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua.

De fato, existem 2 soluções passando por (0,1):

$$\phi(t)=\cosh(t) \text{ e } \psi(t)=1, \text{ com } t\in[0,\infty)$$

Exemplo 8:

Neste exemplo, mostraremos que $\phi(t)\equiv 0$ é única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= |x| \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

Tem-se $f(t,x)=|x|$ que é contínua em $\mathbb{R}^2$, mas note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}$$

Com isso $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Assim as condições do teorema de existência e unicidade não são satisfeitas. Portanto, o PVI não precisa ter solução única. Vamos supor que $\psi(t)$ é uma solução definida em $\mathbb{R}$.

Então:

$$\psi'(t) = |\psi(t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \psi'(t) \geq 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\psi(t)$ é não decrescente.

Se $t \geq 0 \Rightarrow \psi(t) \geq \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi'(t) = |\psi(t)| = \psi(t)$ se $t \geq 0$.

Se $t \leq 0 \Rightarrow \psi(t) \leq \psi(0) = 0$.

Com isso, se $t > 0 \Rightarrow \psi(t) \geq \psi(0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \psi'(t) & = & \psi(t), \ t \geq 0 \\ \psi(0) & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$\begin{cases} \psi'(t) = \psi(t), \ \ \forall t \geq 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi'(t) - \psi(t) = 0 \Rightarrow$$

Multiplicando por e^{-t} em ambos os lados

$$[\psi'(t) - \psi(t)]e^{-t} = 0$$

Isto é,

$$\psi'(t)e^{-t} - \psi(t)e^{-t} = 0.$$

Notamos que $\psi(t)e^{-t} - \psi'(t)e^{-t} = [\psi(t)e^{-t}]'$ e com isso resulta que

$$[\psi(t)e^{-t}]' = 0 \ \ \forall t \geq 0 \Rightarrow \psi(t)e^{-t} = C, \ \text{onde C é uma constante.}$$

Usando a condição $\psi(0) = 0$ temos $C = 0 \Rightarrow \psi(t) = 0, \ \ \forall t \geq 0$.

Para $t < 0$ o caso é análogo, logo nossa única solução para o Problema de Valor Inicial dado é $\psi(t) \equiv 0$.

Exemplo 9:

Neste exemplo queremos achar todas as soluções da Equação Diferencial Ordinária:

$$\dot{x} = t^2x^2 - 4t^2.$$

Também queremos achar a solução que passa por (5,2) e determinar o intervalo I de validade dessa solução.

Para fazer isso, seja $\phi(t)$ solução da Equação Diferencial Ordinária definida em algum intervalo I. Com isso temos:

$$\phi'(t) = t^2[\phi(t)]^2 - 4t^2 \Rightarrow \phi'(t) = t^2[(\phi(t))^2 - 4], \quad t \in I.$$

Considerando $(\phi(t))^2 - 4 \neq 0$, ou seja $\phi(t) \neq \pm 2$, temos:

$$\frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2 - 4} = t^2$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2 - 4} dt = \int t^2 dt \Rightarrow \int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2 - 4} dt = \frac{t^3}{3} + C,$$

com C alguma constante.

Fazendo $\phi(t) = u$, temos $\phi'(t)dt = du$ e com isso obtemos que

$$\int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2 - 4} dt = \int \frac{du}{u^2 - 4}$$

Consideramos agora a substituição $u = 2\sec\theta$. Assim, $du = 2\sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta$ e com isso:

$$\int \frac{du}{u^2 - 4} = \int \frac{2\sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta}{4((\sec\theta)^2 - 1)} = \int \frac{1}{2} \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cancel{\cos}\theta} \cdot \frac{\cancel{\cos}\theta}{\sin\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{cossec}\theta d\theta = \frac{1}{2} \ln|\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{cotg}\theta| + C$$

Como $\frac{u}{2} = \sec\theta$ temos:

$$\int \frac{du}{u^2 - 4} = \ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}} - \frac{2}{\sqrt{u^2 - 4}}\right| + C = \ln\left|\frac{u - 2}{\sqrt{u^2 - 4}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2 - 4}}{u + 2}\right| + C$$

Portanto temos:

$$\int \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2 - 4} dt = \ln\left|\frac{\sqrt{(\phi(t))^2 - 4}}{\phi(t) + 2}\right| + C = \frac{t^3}{3} + C$$

Logo, devemos ter que

$$\frac{\sqrt{(\phi(t))^2 - 4}}{\phi(t) + 2} = ke^{\frac{t^3}{3}} \qquad (5)$$

onde $k = e^C$, sendo C uma constante.

A única condição que devemos ter para a solução (dada implicitamente por (5)) é que $\phi(t) \geq 2$ ou $\phi(t) < -2$.

Agora, queremos uma solução que passe por $(5, 2) = (t_0, \phi(t_0))$. Para encontrá-la, basta substituir o ponto $(5, 2)$ na solução (implícita) encontrada acima e calcular a constante k.

Fazendo isso, acharemos $k = 0$, e portanto $\phi(t)$ é dada por

$$\frac{\sqrt{\phi(t)^2 - 4}}{\phi(t) + 2} = 0.$$

Logo, $\phi(t) \equiv 2$ é a solução procurada, para $I = \mathbb{R}$.

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Aqui estudaremos um caso particular de equações diferenciais que são da forma:

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), t \in I \tag{6}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções que dependem somente da variável t e estão definidas em algum intervalo I.

Uma maneira mais genérica de escrever a equação (6) é na forma

$$a_0(t)\dot{x} + a_1(t)x = b(t), t \in I$$

onde $a_0(t), a_1(t)$ e $b(t)$ são funções somente de t, definidas em I.

Para $a_0(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, a segunda equação pode ser reduzida à forma normal (6).

Aqui, $p(t)$, $q(t) : I \to \mathbb{R}$ são funções conhecidas.

É usual assumir que $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas em algum intervalo I.

Notemos que (6) é da forma $\dot{x} = f(t, x)$ com $f(t, x) = -p(t)x + q(t)$ e com $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / t \in I\}$. Isso garante que $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = -p(t)$ são contínuas em R (pelas hipóteses sobre $p(t)$ e $q(t)$). Então, em acordo com as afirmações na seção 3.2, dado $(x_0, t_0) \in D$, isto é, $t_0 \in I = Dom(p, q)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, existe única solução $\phi(t)$ de (6) tal que $\phi(t_0) = x_0$, com $\phi(t)$ definida em I.

Observação: $\phi(t)$ está definida para todo $t \in I$, onde o intervalo I é o domínio de $p(t)$ e $q(t)$. Isso se obtém olhando a forma explícita da solução.

Exemplo 1:

Queremos resolver o PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2tx &= 0 \\ x(0) &= x_0, \text{ onde } x_0 \neq 0. \end{cases}$$

Neste caso, $p(t) = 2t$ e $q(t) \equiv 0$, de onde decorre que $I = \mathbb{R}$; $f(t, x) = -2tx, D = \mathbb{R}^2$.

Seja $\phi(t)$ solução. Com isso, temos:

$$\begin{cases} \phi'(t) &= -2t\phi(t) \\ \phi(0) &= x_0 \end{cases}$$

Considerando $\phi(t) \neq 0$, $\forall t$, temos $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = -2t, \forall t$. Integrando, temos a seguinte solução: $ln|\phi(t)| = -t^2 + C, \quad \forall t$. Logo, $\phi(t) = ke^{-t^2}$, onde $k = e^C$, sendo C uma constante. Como queremos $\phi(0) = x_0$, concluimos que

$$\phi(t) = x_0 e^{-t^2}$$

é a solução do PVI. Então, é fácil observar que $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 2:

Queremos achar a solução $\phi(t)$ da Equação Diferencial Ordinária dada por

$$\dot{x} - 4x - \cos t = 0$$

que passa pelo ponto $(1, 0)$.

Nosso problema se resume ao seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} - 4x - \cos t &= 0 \\ x(1) &= 0 \end{cases}, t \in I$$

Esta Equação Diferencial Ordinária é da forma $\dot{x} + p(t)x = q(t)$ com $p(t) = -4$ e $q(t) = \cos t$. Claro que $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, logo, existe solução para esta Equação Diferencial Ordinária.

Seja $\phi(t)$ uma solução desta Equação Diferencial Ordinária.

Com isso, temos $\phi'(t) - 4\phi(t) = \cos t$, para $t \in I$.

Usando o fator de integração e^{-4t}, temos:

$$\phi'(t)e^{-4t} - 4\phi(t)e^{-4t} = e^{-4t}\cos t$$

Notemos que $\phi'(t)e^{-4t} - 4\phi(t)e^{-4t} = [\phi(t)e^{-4t}]'$ e com isso

$$[\phi(t)e^{-4t}]' = e^{-4t}\cos t$$

Integrando ambos os lados da expressão acima, temos:

$$\int [\phi(t)e^{-4t}]' dt = \int e^{-4t}\cos t dt$$

ou,

$$\phi(t)e^{-4t} = \int e^{-4t}\cos t dt$$

Agora vamos resolver esta integral por partes. Para isto, basta fazer

$$u = e^{-4t} \Rightarrow du = -4e^{-4t}dt$$

e

$$dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t$$

Portanto:

$$\int e^{-4t} \cos t dt = e^{-4t} \sin t + 4 \int e^{-4t} \sin t dt.$$

Também calculamos por partes a integral $\int e^{-4t} \sin t dt$. Fazemos

$$u = e^{-4t} \Rightarrow du = -4e^{-4t}$$

e

$$dv = \sin t \Rightarrow v = -\cos t.$$

Com isso:

$$\int e^{-4t} \cos t dt = e^{-4t} \sin t + 4 \left[-e^{-4t} \cos t - 4 \int e^{-4t} \cos t dt \right] \Rightarrow$$

$$\int e^{-4t} \cos t dt = e^{-4t} \sin t - 4e^{-4t} \cos t - 16 \int e^{-4t} \cos t dt \Rightarrow$$

$$\int e^{-4t} \cos t dt = \frac{e^{-4t} \sin t}{17} - \frac{4}{17} e^{-4t} \cos t$$

Logo,

$$\phi(t) \cancel{e}^{-4t} = \frac{\cancel{e}^{-4t} \sin t}{17} - \frac{4}{17} \cancel{e}^{-4t} \cos t + C.$$

Assim,

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{17} - \frac{4}{17} \cos t + Ce^{4t}.$$

Agora impondo a condição inicial $x(1) = 0$ temos $c = \frac{4}{17} \cos 1 - \frac{\sin 1}{17}$ e portanto a solução do problema de valor inicial é da forma

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{17} - \frac{4 \cos t}{17} + \frac{4 \cos 1}{17} - \frac{\sin 1}{17}$$

a qual é válida em $I = \mathbb{R}$.

Fator Integrante: Caso Geral Estudaremos aqui um caso mais geral de fator integrante.

Consideraremos a Equação Diferencial Ordinária:

$$\phi'(t) + p(t)\phi(t) = q(t), \phi(t_0) = x_0,$$

com $p, q : I \to \mathbb{R}$.

Existe um fator integrante para esta Equação Diferencial Ordinária que a transforma em uma equação separável.

Este fator integrante é dado por

$$e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} = e^{P(t)}.$$

Multiplicando ambos os lados da Equação Diferencial Ordinária por este fator integrante, obtém-se

$$e^{P(t)}\phi'(t) + e^{P(t)}p(t)\phi(t) = e^{P(t)}q(t)$$

e assim

$$\frac{d}{dt}\left[e^{P(t)}\phi(t)\right] = e^{P(t)}q(t)$$

Integrando ambos os lados de t_0 a t

$$e^{P(t)}\phi(t) - e^{P(0)}\phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)ds$$

Seja $x(0) = e^{P(0)}\phi(t_0)$, com isso

$$e^{P(t)}\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)ds \Rightarrow \phi(t) = x_0e^{-P(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{P(s)-P(t)}q(s)ds$$

é a solução da EDO.

Exemplo 1:

Neste exemplo queremos achar todas as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= x_1 + x_2, \text{ onde } x_1 = x_1(t) \text{ e } x_2 = x_2(t) \end{cases}$$

Achar a solução $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ que satisfaz $\phi(t) = (2, 1)$.

Solução:

Se $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ é solução, então:

$$\begin{cases} \phi_1'(t) &= -\phi_1(t) \\ \phi_2'(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t), \forall t \in I \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação que admite fator integrante. Reescrevemos da seguinte forma:

$$\phi_1'(t) + \phi_1(t) = 0.$$

Nesta equação o fator integrante é e^t e com isso, multiplicando por e^t obtemos:

$$(e^t\phi_1(t))' = 0$$

Integrando, temos que

$$e^t\phi_1(t) = c$$

onde c é uma constante. Portanto:

$$\phi_1(t) = Ce^{-t}$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$\phi_2'(t) = Ce^{-t} + \phi_2 \text{ , isto é, } \phi_2 \text{ satisfaz } \phi_2'(t) - \phi_2(t) = Ce^{-t}$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária da forma $\dot{x}(t)p(t)x(t) = q(t)$ onde $p(t) \equiv -1$ e $q(t) \equiv ce^{-t}$.

Nessa outra equação nosso fator integrante é: $e^{-\int dt} = e^{-t}$ e portanto devemos ter que ϕ_2 satisfaz

$$(\phi_2(t)e^{-t})' = e^{-t}ce^{-t} = ce^{-2t}$$

Isto é, integrando:

$$\phi_2(t)e^{-t} = \int ce^{-2t}dt, \text{ ou } \phi_2(t)e^{-t} = -\frac{ce^{-2t}}{2} + d$$

onde d é uma constante; com isso, obtemos que $\phi_2(t) = de^t - \frac{c}{2}e^{-t}$. Logo, a solução do sistema é:

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) = (ce^{-t}, de^t - \frac{c}{2}e^{-t}), \;\; t \in \mathbb{R}$$

onde c e d são constantes.

Agora, calculamos a solução $\phi(t)$ tal que $\phi(0) = (2, 1)$.

Aplicando essa condição na solução obtida acima, obtemos:

$$(2,1) = (c, d - \frac{c}{2})$$

Isso implica que $c = 2$ e $d = 2$.

Portanto, a solução particular procurada é

$$\phi(t) = (2e^{-t}, 2e^{t} - e^{-t})$$

Exemplo 2:

Queremos achar a solução da equação com o seguinte problema de valor inicial e depois achar o intervalo de validade.

$$\begin{cases} t^2\dot{x} + 2tx &= 1 \\ x(1) &= 0 \end{cases}$$

Solução:

Seja $\phi(t)$ solução do problema. Com isso:

$$\begin{cases} t^2\phi'(t) + 2t\phi(t) &= 1 \\ \phi(1) &= 0 \end{cases}$$

Para $t \neq 0$ temos:

$$\phi'(t) + \frac{2}{t}\phi(t) = \frac{1}{t^2}$$

Para essa equação, o fator integrante é $e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$. Portanto, multiplicando pelo fator integrante em ambos os lados da EDO temos:

$$t^2[\phi'(t) + \frac{2}{t}\phi(t)] = 1 \Rightarrow t^2\phi'(t) + 2t\phi(t) = 1$$

Notamos que $t^2\phi'(t) + 2t\phi(t) = [t^2\phi(t)]'$.

Assim, $\phi(t)$ tem que satisfazer

$$[t^2\phi(t)]' = 1, \text{ isto é, } t^2\phi(t) = \int dt$$

De onde concluimos que

$$t^2\phi(t) = t + c, \text{ ou } \phi(t) = \frac{t+c}{t^2}$$

Como queremos $\phi(1) = 0$ então devemos tomar $c = -1$ e portanto a solução do problema é

$$\phi(t) = \frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$$

Como $\phi(t)$ existe $\forall\ t \neq 0$ e $t = 1$ deve pertencer ao intervalo I de validade de solução, concluimos que $I = (0, +\infty)$.

Exemplo 3:

Aqui, desejamos achar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1^2 & x_1(t_0) &= \alpha, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R} \\ \dot{x_2} &= x_1 + x_2 & x_2(t_0) &= -\beta, \text{ onde } \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Seja $\phi_1(t)$ solução da primeira equação. Com isso temos:

$$\phi_1'(t) = (\phi_1(t))^2 \Rightarrow \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2} = 1$$

Consideramos $\phi(t) \neq 0$. Com esta condição satisfeita temos

$$\int \frac{\phi_1'(t)}{(\phi_1(t))^2} dt = \int dt$$

Com isso, a solução geral da primeira equação é dada por:

$$-\frac{1}{\phi_1(t)} = t + c \Rightarrow \phi_1(t) = -\frac{1}{t+c}$$

Como queremos $\phi_1(t_0) = \alpha$ devemos ter $t_0 + c = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow c = -\frac{1}{\alpha} - t_0$ e com isso

$$\phi_1(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{\alpha} - t_0}$$

ou seja,

$$\phi_1(t) = -\frac{\alpha}{\alpha(t-t_0) - 1}$$

Substituindo $\phi_1(t)$ na segunda igualdade e admitindo $\phi_2(t)$ solução teremos:

$$\phi_2'(t) = \frac{-\alpha}{\alpha(t-t_0) - 1} + \phi_2(t)$$

e assim

$$\phi_2'(t) - \phi_2(t) = \frac{-\alpha}{\alpha(t-t_0) + 1}$$

Para esta nossa nova equação temos o fator integrante como sendo e^{-t} com isso:

$$[\phi_2(t)e^{-t}]' = \frac{-\alpha e^{-t}}{\alpha(t-t_0) - 1} \Rightarrow$$

$$\phi_2(t)e^{-t} = \int \frac{-\alpha e^{-t}}{\alpha(t-t_0)-1}dt,$$

Finalmente temos

$$\phi_2(t) = e^t \int \frac{-\alpha e^{-t}}{\alpha(t-t_0)+1}dt$$

Com isso a solução do sistema é

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) = \left(\frac{-\alpha}{\alpha(t-t_0)+1}, e^t \int \frac{-\alpha e^{-t}}{\alpha(t-t_0)+1}dt\right)$$

Exemplo 4:

Considere a Equação Diferencial Ordinária $\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$ com:

$$\begin{cases} p \in \mathbb{R} \text{ é uma constante fixa;} \\ q(t) \text{ contínua para } t \geq 0 \\ \text{ satisfazendo } |q(t)| \leq k, \forall t \geq 0, k \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

a) Achar $\phi(t)$ tal que $\phi(0) = 0$

b) Para $p \neq 0$, prove que $\phi(t)$ satisfaz:

$$|\phi(t)| \leq \frac{k}{p}(1 - e^{-pt}), \forall t \geq 0$$

Solução:

a) Seja $\phi(t)$ solução da Equação Diferencial Ordinária. Portanto

$$\phi(t)' + p\phi(t) = q(t)$$

Nosso fator integrante é $e^{\int pdt} = e^{p\int dt} = e^{pt}$.

Multiplicando ambos os lados por e^{pt} teremos:

$$e^{pt\phi'}(t) + pe^{pt}\phi(t) = e^{pt}q(t) \Rightarrow$$

$$[e^{pt}\phi(t)]' = e^{pt}q(t) \Rightarrow e^{pt}\phi(t) = \int_0^t e^{ps}q(s)ds$$

pois queremos $\phi(0) = 0$.

Assim,

$$e^{pt}\phi(t) = \int_0^t e^{ps}q(s)ds \text{ e portanto a solução desejada é } \phi(t) = e^{-pt}\int_0^t e^{ps}q(s)ds$$

b) Como por hipótese $|q(s)| \leq k \Rightarrow |e^{ps}q(s)| < |k||e^{ps}|$ e com isso

$$\int_0^t |e^{ps}q(s)|ds < \int_0^t |ke^{ps}|ds \Rightarrow$$

$$e^{-pt}\int_0^t |e^{ps}q(s)|ds < e^{-pt}\int_0^t |k||e^{ps}|ds$$

Como $k > 0$ temos

$$e^{-pt}\int_0^t |k||e^{ps}|ds = e^{-pt}k\int_0^t e^{ps}ds$$

Considerando $p \neq 0$ temos:

$$e^{-pt}\int_0^t |k||e^{ps}|ds = e^{-pt}k\left[\frac{e^{ps}}{p}\right]\Bigg|_{s=0}^{s=t}$$

Concluimos então que

$$|\phi(t)| \leq e^{-pt}k\left[\frac{e^{ps}}{p}\Bigg|_{s=0}^{s=t}\right], \forall t \geq 0 \Rightarrow$$

$$|\phi(t)| \leq e^{-pt}k\left[\frac{e^{pt}}{p} - \frac{1}{p}\right], t \geq 0 \Rightarrow$$

$$|\phi(t)| \leq e^{-pt}\frac{k}{p}\left[e^{pt} - 1\right], \forall t \geq 0$$

Isso diz que:

$$|\phi(t)| \leq \frac{k}{P}(1 - e^{-pt})$$

Exemplo 5:

Seja p uma constante não nula e $q_1(t)$ e $q_2(t)$ funções contínuas para $t \geq 0$ tais que:

$$|q_1(t) - q_2(t)| \leq k, \forall t \geq 0, \text{ onde } k \in \mathbb{R}_+$$

Seja ϕ solucão de

$$\dot{x}(t) + px(t) = q_1(t) \tag{7}$$

Seja ψ solução de

$$\dot{x}(t) + px(t) = q_2(t) \tag{8}$$

Suponha $\phi(0) = \psi(0)$.

Provar que $|\phi(t) - \psi(t)| \leq \frac{k}{p}(1 - e^{-pt})\ \ \forall t \geq 0$.

Demonstração:

Se $\phi(t)$ é solução de (7) então

$$\phi'(t) + p\phi(t) = q_1(t) \Rightarrow \phi(t) = e^{-pt}\int_0^t e^{ps}q_1(s)ds + c_1$$

Como $\psi(t)$ é solução de (8) então

$$\psi'(t) + p\psi(t) = q_2(t) \Rightarrow \psi(t) = e^{-pt}\int_0^t e^{ps}q_2(s)ds + c_2$$

Como $\psi(0) = \phi(0) \Rightarrow c_1 = c_2$ e portanto:

$$\phi(t) = e^{-pt}\int_0^t e^{ps}q_1(s)ds + c_1 \tag{9}$$

$$\psi(t) = e^{-pt}\int_0^t e^{ps}q_2(s)ds + c_1 \tag{10}$$

Subtraindo (9) de (10), temos:

$$\phi(t) - \psi(t) = e^{-pt}\left[\int_0^t e^{ps}q_1(s)ds - \int_0^t e^{ps}q_2(s)ds\right]$$

Pela linearidade da integral, temos:

$$\phi(t) - \psi(t) = e^{-pt}\left[\int_0^t e^{ps}(q_1(s) - q_2(s))ds\right] \Rightarrow$$

$$|\phi(t) - \psi(t)| = e^{-pt}\left|\int_0^t e^{ps}(q_1(s) - q_2(s))ds\right|$$

Com isso:

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq e^{-pt}\int_0^t e^{ps}|q_1(s) - q_2(s)|ds \leq e^{-pt}\int_0^t e^{ps}Kds$$

Logo, $|\phi(t) - \psi(t)| \leq e^{-pt}K\int_0^t e^{ps}ds$, ou seja,

$$|\phi(t) - \psi(t)| < Ke^{-pt}\left[\frac{e^{pt}}{p} - \frac{1}{p}\right]$$

com $p \neq 0$.

Assim, obtemos que:

$$|\phi(t) - \psi(t)| < \frac{k}{p}(1 - e^{-pt}), \quad \forall t \geq 0.$$

3.4 Equações Diferenciais Homogêneas de Primeira Ordem

Este outro tipo de equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f(t,x)$$

onde $f(t,x)$ é uma função homogênea de grau zero, ou seja,

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x), \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para a resolução deste tipo de equação basta fazer a mudança de variável $x = ty$, obtendo

$$\dot{x} = t\dot{y} + y \text{ ou } \dot{y} = \frac{\dot{x} - y}{t}, t \neq 0.$$

Com isso, a EDO $\dot{x} = f(t,x)$ torna-se

$$\dot{y} = \frac{f(t,ty) - y}{t} = \frac{f(1,y) - y}{t}$$

para $t \neq 0$, a qual é uma Equação Diferencial Ordinária de variáveis separáveis.

Exemplo 1:

Achar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{x+t}{t}, \quad \text{onde } x = x(t) \\ x(1) &= 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$$

Solução:

$f(t,x) = \frac{x+t}{t}$ é homogênea de grau zero, pois $f(t,x) = f(\lambda t, \lambda x)$.

De fato:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda x + \lambda t}{\lambda t} = \frac{\cancel{\lambda}(x+t)}{\cancel{\lambda} t} = \frac{x+t}{t} = f(t,x).$$

Fazendo $x = ty$ temos

$$\dot{x} = y + t\dot{y}$$

Como $\dot{x} = \frac{x+t}{t} \Rightarrow \cancel{y} + t\dot{y} = \cancel{y} + 1 \Rightarrow$

$$\dot{y} = \frac{1}{t} \Rightarrow y = \ln|t| + c, \quad , t \neq 0.$$

Mas, sendo $y = \frac{x}{t}$, resulta que a solução geral é dada por:

$$x(t) = t\ln|t| + tc$$

Como queremos que $x(1) = 0$, resulta que $c = 0$ e com isso a solução do problema de valor inicial é

$$x(t) = t\ln|t|$$

onde $t \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo 2:

Achar a solução da Equação Diferencial Ordinária

$$\dot{x} = \frac{t^2 + tx + x^2}{t^2},$$

com $t \neq 0$ e $x = x(t)$.

Neste caso, $f(t,x) = \frac{t^2+tx+x^2}{t^2}$ é homogênea de grau zero.

De fato:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\cancel{\lambda}^2 t^2 + \cancel{\lambda}^2 tx + \cancel{\lambda}^2 x^2}{\cancel{\lambda}^2 t^2} = \frac{t^2 + tx + x^2}{t^2} = f(t,x)$$

Com isso a Equação Diferencial Ordinária sob a mudança de variável $x = ty$ (donde $\dot{x} = y + t\dot{y}$) se transforma em

$$y + t\dot{y} = \frac{t^2 + t^2 y + t^2 y^2}{t^2} \Rightarrow \cancel{y} + t\dot{y} = 1 + \cancel{y} + y^2$$

Isto é, y deve ser solução de $\dot{y} = \frac{1}{t}(1 + y^2)$ que é uma EDO de variáveis separáveis.

Aplicando a técnica de equações separáveis obtemos

$$\dot{y} = \frac{1 + y^2}{t} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{1 + y^2} = \frac{1}{t}$$

com $t \neq 0$.

Integrando ambos os lados, resulta

$$\text{arctg} y = \ln|t| + c \text{ com } t \neq 0.$$

Segue que a solução desejada é

$$x(t) = t \cdot \text{tg}(\ln|t| + c)$$

com $t \neq 0$.

3.5 Equações Diferenciais Exatas

Este novo tipo de equação diferencial é da seguinte forma:

$$\dot{x} = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)}$$

onde reagrupando de forma conveniente temos

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0 \tag{11}$$

A seguinte hipótese para uma equação com essa característica é que $M(t,x)$ e $N(t,x)$ sejam funções de classe C^1 em algum retângulo R onde

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / a < t < b \text{ e } c < x < d\}$$

com a, b, c e d reais.

A Equação Diferencial Ordinária $(\star)$ é exata em R se existe uma função $F(t,x)$ de classe C^1 em R tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x} = N(t,x) \text{ em } R$$

Lema 1: *Se $\phi(t)$ é solução de (11) e (11) é exata, então $F(t,\phi(t)) = c$, onde c é uma constante.*

Demonstração:

Como a EDO

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0$$

é exata, existe uma $F(t,x)$ de classe C^1 tal que

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\dot{x} = 0.$$

Como $\phi(t)$ é solução, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,\phi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,\phi(t))\phi'(t) = 0$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt}(F(t,\phi(t)) = 0, \text{ com } t \in [a,b]$$

Como F é de classe C^1 e $t \in [a,b]$ é um intervalo conexo, então $F(t,\phi(t)) = c$ onde c é uma constante. ■

Lema 2: *Se (11) é exata então toda função derivável $x = \phi(t)$ definida implicitamente por $F(t,x) = c$ é solução de (11), onde c é uma constante.*

Demonstração: Seja $\phi(t)$, $t \in I$, tal que $F(t,\phi(t)) = c$. Derivando em relação a t e aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,\phi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,\phi(t))\phi'(t) = 0$$

Como (11) é exata, fazemos $M(t,\phi(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,\phi(t))$ e $N(t,\phi(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,\phi(t))\phi'(t)$, logo, $M(t,\phi(t)) + N(t,\phi(t))\phi'(t) = 0 \Rightarrow \phi(t)$ é solução de (11) em I. ■

Teorema 3.1 *Se $M(t,x)$ e $N(t,x)$ são de classe $C^1(\mathbb{R})$ então*

$$\textit{(11) é exata} \Leftrightarrow \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} \textit{ em } R$$

Demonstração: Se (11) é exata, tem-se que existe $F(t,x)$ de classe C^1 tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x} = N(t,x).$$

Como $M(t,x)$ e $N(t,x) \in C^1$ então $F \in C^2(R)$ e tem-se: $\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}$. Pelo teorema de Schwarz temos

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

logo,

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

em R. ■

Para verificar a recíproca, temos por hipótese que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ em R.

Com isso, definimos $F(t,x)$ da seguinte forma:

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} M(s,x_0)ds + \int_{x_0}^{x} N(t,y)dy$$

onde $(t_0,x_0) \in R$, (t_0,x_0) fixo e $(t,x) \in R$ qualquer. Então F é C^1 em $\mathbb{R}$, pois é integral de funções contínuas.

Derivando parcialmente em relação a t, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = M(t,x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)dy$$

Como $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x}$ obtemos

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dy = M(t,x_0) + M(t,x) - M(t,x_0) = M(t,x)$$

Derivando agora $F(t,x)$ em relação a x temos $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 + N(t,x) = N(t,x)$, isto é, F é C^1 no retângulo R e satisfaz $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x)$ e $\frac{\partial F}{\partial x} = N(t,x)$ em R. Portanto, (11) é exata.

■

Exemplo 1:

a) Mostrar que $(3t^2 + x^2) + (2tx)\dot{x} = 0$ é exata em $R = \mathbb{R}^2$.

b) Achar a solução geral

c) Achar a solução que passa por $(1, -2)$.

Solução:

a) Neste caso,

$$M(t,x) = 3t^2 + x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2x$$

$$N(t,x) = 2tx \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = 2x$$

Como $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ temos pelo teorema que neste exemplo a equação é uma Equação Diferencial Ordinária exata em $R = \mathbb{R}^2$.

b) Para achar a solução geral deste exemplo na forma $F(t,x) = c$, onde c é uma constante, façamos $(x_0, y_0) = (0,0)$ e com isso, usando o Teorema 4.1, devemos mostrar que

$$F(t,x) = \int_0^t M(s,0)ds + \int_0^x N(t,y)dy = \int_0^t 3s^2 ds + \int_0^x 2ty dy = t^3 + tx^2.$$

Pelo Lema 2, as soluções são definidas para $F(t,x) = c$, isto é, por $t^3 + tx^2 = c \Rightarrow$

$$x = \pm\sqrt{\frac{c - t^3}{t}}$$

c) Aplicando a condição que diz que a solução tem que passar no ponto $(-1, 2)$ temos $\phi(1) = -2 \Rightarrow -2 = -\sqrt{\frac{c-1^3}{1}} \Rightarrow c = 5$, e portanto a solução procurada é

$$\phi(t) = -\sqrt{\frac{5 - t^3}{t}}.$$

Exemplo 2:

Achar a solução da seguinte equação diferencial dada por

$$e^t + e^t(x+1)\dot{x} = 0$$

Note que da maneira como esta equação está escrita, ela não é exata.

De fato, sendo $M(t,x) = e^t$ e $N(t,x) = e^t(x+1)$ temos

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = xe^t + e^t$$

ou seja,

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \neq \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

o que não caracteriza uma equação exata.

Mas, se dividirmos ambos os lados por e^t, a equação se torna exata, e assim temos

$$1 + (x+1)\dot{x} = 0$$

donde temos $(x+1)dx = -dt$, isto é: $\frac{dt}{dx} = -(x+1)$, ou

$$F(t,x) = x^2 + x + 2t = c.$$

Transformação de EDO não exata em EDO exata: Nem todas as equações do tipo $M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0$ são exatas. Para isso, procuramos uma função $u = u(t,x)$ e chamamos esta função de fator integrante, de modo que se multiplicarmos $M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0$ em ambos os lados por este fator integrante, a equação torna-se exata, ou seja,

$$u(t,x)M(t,x)dt + u(t,x)N(t,x)dx = 0$$

é exata.

Exemplo 1:

Queremos achar a solução para a seguinte equação dada por:

$$xdt - tdx = 0.$$

Notamos que esta equação não é exata, pois

$$M(t,x) = x \Rightarrow \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 1$$

$$N(t,x) = -t \Rightarrow \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \neq \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}.$$

A funcão $u(t,x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, é um fator integrante, pois multiplicando nossa Equação Diferencial Ordinária por $u(t,x)$ teremos

$$\frac{1}{x}dt - \frac{t}{x^2}dx = 0$$

que é exata.

Notamos que neste caso temos $x \neq 0$ e com isso nosso domínio é $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ ou $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\}$.

Sendo a equação $\frac{1}{x}dt - \frac{t}{x^2}dx = 0$ exata, temos que existe, (Teorema 4.1) $F(t,x) = c$ tal que

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}.$$

Com isso, a solução do problema é dada implicitamente por $F(t,x) = c$, c constante, onde

$$F(t,x) = \frac{t}{x} = c.$$

De fato,

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}$$

para $(t,x) \in R$.

Lema 3: *Considere a Equação Diferencial Ordinária*

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{12}$$

com $M(t,x)$ e $N(t,x)$ de classe C^1 em um retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$, onde $N(t,x) \neq 0, \forall (t,x) \in R$. Suponha que

$$p(t) = \frac{1}{N(t,x)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$$

é uma função somente de t. Então:

a) *$u(t) = e^{P(t)}$, onde $P'(t) = p(t)$ é um fator integrante para $(\star)$.*

b) *Todo fator integrante de (12) que só depende de t é da forma $e^{P(t)}$, onde $P'(t) = p(t)$.*

Demonstração:

a) Para provar que $u(t)$ é fator integrante devemos provar que

$$\frac{\partial}{\partial x}(uM) = \frac{\partial}{\partial t}(uN)$$

Notamos que, sendo $u(t) = e^{P(t)}$ temos que $u'(t) = e^{P(t)}P'(t) = P'(t)u(t)$

Vamos derivar $u(t) \cdot N(t,x)$ em relação a t, aplicando a regra do produto, obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)N(t,x)) = u'(t)N(t,x) + u(t)\frac{\partial(N(t,x))}{\partial t} \tag{13}$$

Mas, sendo $u'(t) = P'(t)u(t)$ e substituindo na fórmula (13) anterior, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)N(t,x)) = u(t)\left[P'(t)N(t,x) + \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t}\right] \tag{14}$$

Sabendo por hipótese que $P'(t) = p(t)$ e $p(t) = \frac{1}{N(t,x)}\left[\frac{\partial(M(t,x))}{\partial x} - \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t}\right]$ é somente uma função de t, substituindo $p(t)$ em (14) temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)N(t,x)) = u(t)\left[\frac{1}{N(t,x)}\left(\frac{\partial(M(t,x))}{\partial x} - \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t}\right)N(t,x) + \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t}\right]$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)N(t,x)) = u(t)\left[\frac{\partial(M(t,x))}{\partial x} - \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t} + \frac{\partial(N(t,x))}{\partial t}\right]$$

e com isso:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)N(t,x)) = u(t)\frac{\partial(M(t,x))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u(t)M(t,x))$$

Portanto, $u(t) = e^{P(t)}$ é um fator integrante pois tornou a equação que inicialmente não era exata em uma equação diferencial exata.

b) Seja $u = u(t)$ fator integrante que depende somente de t. Com este fator integrante a equação (12) torna-se exata e devemos ter:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uM) = \frac{\partial}{\partial t}(uN)$$

Sendo $u = u(t)$ somente uma função de t e considerando $N(t,x) \neq 0$ no retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ temos:

$$u(t)\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} = u'(t)N(t,x) + u(t)\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} \Rightarrow u'(t) = \frac{u(t)}{N(t,x)}\left(\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}\right).$$

Isso diz que $u(t)$ é solução de $u'(t) - p(t)u(t) = 0$, se tomarmos

$$p(t) = \frac{1}{N(t,x)}\left(\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}\right)$$

A solução dessa EDO é dada por:

$$u(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{P(t)}$$

com $P'(t) = p(t)$. ■

1) Exemplo:

Neste exemplo queremos achar a solução da seguinte equação diferencial:

$$(t^2 + x^2 + 1)dt - (tx + x)dx = 0$$

sendo $t > 1$ e $x < 0$.

Para fazer isso, observamos que essa equação é do tipo (12) com:

$$M(t,x) = t^2 + x^2 + 1 \text{ e } N(t,x) = -(tx + x)$$

Mas $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = -x$, o que não satisfaz as condições para que a equação seja exata.

Então, devemos achar um fator integrante.

Sendo $p(t) = \dfrac{1}{N(t,x)}\left[\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}\right] = -\dfrac{3}{t+1}$ uma função somente de t, temos, pelo Lema 3, que $u(t) = e^{\int p(t)dt} = \frac{1}{(t+1)^3}$ é um fator integrante.

Multiplicando em ambos os lados da equação por $u(t)$ tornaremos a equação exata, ou seja,

$$\frac{t^2 + x^2 + 1}{(t+1)^3}dt + -\frac{(tx + x)}{(t+1)^3}dx = 0$$

é exata, o que é fácil de ser verificado diretamente.

Para achar a solução desta nova equação façamos a seguinte técnica:

Suponhamos que a solução é dada implicitamente por $U(t,x) = c$, c constante.

Com isso, devemos ter

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = \frac{t^2 + x^2 + 1}{(t+1)^3} = \frac{(t+1)^2 - 2t - 1 + x^2 + 1 + 2 - 2}{(t+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{t+1} + \frac{x^2+2}{(t+1)^3} - \frac{(2t+2)}{(t+1)^3}$$
$$= \frac{1}{t+1} + \frac{x^2+2}{(t+1)^3} - \frac{2}{(t+1)^2}$$

Agora, integrando em relação a t, temos:

$$U(t,x) = \ln|t+1| + \frac{2}{t+1} - \frac{x^2+2}{2(t+1)^2} + \phi(x)$$

sendo $\phi(x)$ apenas uma função de x.

Mas $U(t,x)$ ainda satisfaz a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = N(t,x) = -\frac{(tx+x)}{(t+1)^3} = -\frac{x}{(t+1)^2}$$

Mas, sendo $U(t,x) = \ln|t+1| + \frac{2}{t+1} - \frac{x^2+2}{2(t+1)^2} + \phi(x)$, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{x}{(t+1)^2} + \phi'(x)$$

Comparando as duas expressões obtidas para $\frac{\partial U}{\partial x}$, devemos ter que $\phi'(x) = 0$, ou seja $\phi(x) = c$, onde c é uma constante.

Com isso, a função $U(t,x)$ é dada por

$$U(t,x) = \ln|t+1| + \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{x^2+2}{2(t+1)^2} + c.$$

e a solução do problema é dada implicitamente por

$$\ln|t+1| + \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{x^2+2}{2(t+1)^2} = c$$

com c uma constante.

3.6 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Redutíveis

As equações diferenciais de segunda ordem redutíveis são da seguinte forma:

$$\begin{cases} x'' = g(t,x') \\ x(t_0) = x_0 \;;\; x'(t_0) = x_1 \end{cases} \qquad (15)$$

onde $g(t,x_1,x_2)$ não depende de x_1 e satisfaz as condições do Teorema de Existência e Unicidade.

A técnica para este tipo de equação consiste em uma simples mudança de variável. Basta fazer $x'(t) = p(t)$ obtendo $x''(t) = p'(t)$, e com isso a nossa equação fica reescrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{p} &= g(t,p) \qquad\qquad (16) \\ p(t_0) &= x_1 \end{cases}$$

Seja $\psi(t)$ solução de (16) em I, com $t_0 \in I$. Vamos definir $\phi(t)$ em I da seguinte forma:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds, t \in I.$$

Então $\phi'(t) = \psi(t), \forall t \in I \Rightarrow \phi''(t) = \psi'(t) = g(t, \psi(t)) = g(t, \phi'(t)), \forall t \in I$, ou seja,

$$\phi''(t) = g(t, \phi'(t)) \forall t \in I.$$

Também, temos que $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi'(t_0) = \psi(t_0) = x_1$.

Assim, resulta que $\phi(t)$ é solução de (15).

1) Exemplo:

Agora vamos achar a solução para a seguinte equação diferencial com as condições iniciais impostas:

$$\begin{cases} x'' + 2x' = t \\ x(0) = 1 \ ; \ \ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Solução:

Para esta equação vamos aplicar a técnica para resolução de equações diferenciais de segunda ordem redutíveis.

Para isto, basta fazer a seguinte mudança de variável:

$\dot{x}(t) = p(t)$, o que segue, $\ddot{x}(t) = \dot{p}(t)$ e das condições iniciais para $x(t)$ devemos ter $p(0) = 0$. Obtemos uma equação de primeira ordem da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) + 2p(t) = t \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

Para esta nova equação, temos um fator integrante $u(t) = e^{2\int dt} = e^{2t}$.

Aplicando a técnica de fator integrante vista na seção anterior, chegamos na seguinte solução:

$$p(t) = \frac{\int te^{2t}dt}{e^{2t}}$$

ou seja,

$$p(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + ce^{-2t}.$$

Como queremos $p(0) = 0$, temos $c = \frac{1}{4}$, ou seja,

$$p(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Mas $\dot{x}(t) = p(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$ e com isso

$$x(t) = \int \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{e^{2t}}{8} + c$$

Como também desejamos que $x(0) = 1$, temos $c = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.

Portanto, a solução procurada é:

$$x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{e^{2t}}{8} + \frac{9}{8}.$$

4 Sistemas de Equações Diferenciais

Neste capítulo, estudamos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. Tais sistemas são acoplados, isto é, o sistema envolve n equações incógnitas. Cada equação envolve pelo menos 2 dessas funções.

O exemplo de Lotka-Volterra visto no primeiro capítulo é um exemplo de um sistema (acoplado) de duas Equações Diferenciais Ordinárias.

O exemplo abaixo é um sistema de duas equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + au\theta = 0 \\ \theta_t - k\theta_{xx} + bu\theta = 0 \end{cases}$$

4.1 Existência e Unicidade para Sistemas Lineares

Aqui, estudamos a existência e unicidade de soluções para sistemas lineares de equações diferenciais da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) \tag{17}$$

onde:

$A(t) = (a_{ij}(t))$ é uma matriz $n \times n$,

$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$ é uma matriz $n \times 1$

e estão definidas em algum intervalo I.

Nesse nosso estudo vamos considerar (17) na "faixa" $D = (I \times \mathbb{R}^n)$.

O sistema (17) é da forma:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

sendo as coordenadas (ou componentes) de $f(t, x)$ dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(t,x) &= a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ f_n(t,x) &= a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned}$$

Se a_{ij} e g_i são contínuas em I, $\forall i, j$ então $f_k(t, x)$ é contínua em D, $\forall k = 1, 2, ..., n$.

Observação: É claro que se a_{ij} e g_i são contínuas em I, então $f(t,x)$ tem derivadas parciais em x contínuas em D. Então pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções existe uma única solução $\phi(t)$ de (17) satisfazendo $\phi(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e definida em algum intervalo $J \subset I$, com $t_0 \in J$.

De fato, essa solução está definida em todo intervalo I, como mostra o próximo teorema. Assim, o sistema (17) possui solução global (definida em todo I).

Teorema 4.1 *Supor que $A(t)$ e $g(t)$ são contínuas em I. Então, dado $(t_0, x_0) \in D$, existe única solução $\phi(t)$ de (17) satisfazendo $\phi(t_0) = x_0$ e definida em I.*

Demonstração: Para provar este teorema usaremos outros 3 conhecidos teoremas da análise matemática, enunciados a seguir:

1o.) *(Teste M de Weierstrass) Seja $f_n : A \to X$ seqüência de funções, sendo $A \neq \emptyset$ e X um espaço de Banach. Suponha que existam constantes M_n tais que $||f_n(x)||_X \leq M_n$, $\forall x \in A$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ seja convergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em A.*

2o.) *(Limite Uniforme de Funções Contínuas) Seja $f_n : A \to N$ seqüência de funções contínuas em $A \subset M$ com M e N espaços métricos. Suponha $f_n \to f$ uniformemente em A. Então f é contínua em A.*

3o.) *(Integração de Limite Uniforme) Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seqüência de funções integráveis convergindo uniformemente em $[a,b]$ para uma função f. Então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.*

A prova destes teoremas pode ser vista em Marsden[1].

Prova do Teorema 4.1:

Inicialmente, façamos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Existe uma função contínua $\phi(t)$ definida em I satisfazendo a seguinte equação integral:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + g(s)]ds$$

com $\phi : I \to \mathbb{R}^n$.

Para a justificativa desta afirmação vamos definir uma seqüência de funções $\phi_m : I \to \mathbb{R}^n$ através da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
\phi_0(t) &= x_0 \\
\phi_m(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(s)\phi_{m-1}(s) + g(s)]ds, \quad t \in I, m = 1, , 2, 3, ...
\end{aligned} \tag{18}$$

Temos que cada função da seqüência ϕ_m dada por (18) é contínua em I.

Para provar que ϕ_m é contínua para todo m, vamos usar o procedimento de indução:

1o.) $\phi_0(t) = x_0$ é contínua, pois é uma função constante.

2o.) Vamos supor que $\phi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(s)\phi_{k-1}(s) + g(s)]ds$ é contínua.

3o.) Provar que $\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(s)\phi_k(s) + g(s)]ds$ também é contínua.

De fato:

Temos por hipótese de indução que $\phi_k(t)$ é contínua, com isso $A(s)\phi_k(s)$ também é contínua, pois $A(s)$ é contínua e o produto de funções contínuas é uma função contínua.

Com isso, $A(s)\phi_k(s) + g(s)$ também é contínua (soma de funções contínuas).

Portanto, $x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(s)\phi_k(s) + g(s)]ds$ é contínua pois integral de funções contínuas é contínua.

Finalmente, temos que $\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(s)\phi_k(s) + g(s)]ds$ é contínua, o que prova nossa justificativa.

Agora, queremos provar que a seqüência $\{\phi_m(t)\}$ converge uniformemente em todo intervalo $[a, b] \subset I$, com $t_0 \in [a, b]$.

Para mostrar isso, notamos que:

$$\phi_m = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + \ldots + (\phi_m - \phi_{m-1})$$

Isto é, ϕ_m é a soma parcial da seguinte série:

$$\phi_m(t) = \phi_0(t) + \sum_{k=1}^{m}[\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)] \quad \text{(série telescópica)} \tag{19}$$

Com isso, para mostrar que $\{\phi_m(t)\}$ converge uniformemente em $[a, b] \subset I$, com $t_0 \in [a, b]$, basta mostrarmos que a série dada em (19) converge uniformemente em $[a, b] \subset I$.

Usaremos o teste M-Weierstrass para mostrar essa convergência.

Para isso, sejam $M = \sup |A(s)|$ com $s \in [a, b]$ e $C = \sup |\phi_1(s) - \phi_0(s)| = \sup\limits_{[a,b]} |\phi_1(s) - x_0|$.

Observação: Garantimos a existência de M e C pois $A(s)$ e $\phi_k(s)$ são contínuas.

Para mostrar que a série converge, usaremos indução.

Temos que:

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_1 - \phi_0] ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot |\phi_1(s) - \phi_0(s)| ds \right|$$

Com isso,

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq MC \left| \int_{t_0}^{t} dt \right|$$

ou seja,

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq MC|t - t_0| \leq MC(b - a).$$

Por indução, temos:

$$|\phi_k - \phi_{k-1}| \leq \frac{CM^{k-1}|t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} \leq \frac{CM^{k-1}(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Como a série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[M(b-a)]^k}{k!}$$

converge, resulta pelo teste M-Weierstrass que a série (19) converge uniformemente em $[a, b]$.

Assim, está estabelecida a convergência uniforme de $\phi_m(t)$.

Agora, dado $t \in I$, escolhemos $J = [a, b] \subset I$ tal que $t_0, t \in J$ e definimos $\phi(t) = \lim_{m\to\infty} \phi_m(t)$ (limite pontual).

Pela unicidade do limite temos que $\phi(t)$ está bem definida $\forall t \in I$ (independente da escolha de J).

Sendo $\phi_m(t)$ contínuas, a convergência uniforme em $[a, b]$ garante que $\phi(t) = \lim_{m\to\infty} \phi_m(t)$ é uma função contínua em J.

Em particular, é contínua em t.

Como tomamos qualquer $t \in I$, temos que $\phi(t)$ é contínua em I.

Fazendo $m \to \infty$ em (18) obtemos

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + g(s)] ds, \quad \forall t \in I$$

(onde foi usado o teorema de integração de limite uniforme em cada componente).

Assim, a afirmação 1 está provada.

Afirmação 2: $\phi(t)$ é solução de (17) em I, com $\phi(t_0) = x_0$.

De fato, notamos que

$$\phi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} [A(s)\phi(s) + g(s)]ds = x_0$$

e derivando $\phi(t)$ em relação a t, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t) + g(t), \forall t \in I.$$

Afirmação 3: O PVI associado a (17) tem solução única.

Para mostrarmos a unicidade, vamos supor que existam $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ soluções desse PVI, tais que:

$$\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0) = x_0$$

Então,

$$\phi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi_i(s) + g(s)]ds, \ \ i = 1, 2.$$

Para provar que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ em I, basta provar que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ em todo o subintervalo da forma $[a, b] \subset I$ com $t_0 \in [a, b]$.

Seja $M = \sup\{|A(s)|, s \in [a, b]\}$.

Temos, para $t \in [a, b]$, que:

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_1(s) - \phi_2(s)]ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)||\phi_1(s) - \phi_2(s)|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M|\phi_1(s) - \phi_2(s)|ds \right|, \ \ \forall t \in [a, b].$$

Agora, usando a desigualdade de Gronwall (que será mostrada no final desta demonstração), temos:

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq 0, \forall t \in [a, b].$$

Logo,

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \ \ \forall t \in [a, b].$$

Com isso, fica provada a unicidade.

Desigualdade de Gronwall Sejam $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ contínuas e k uma constante, $k \geq 0$. Se acontece $f(t) \leq k + \int_\alpha^t f(s)g(s)ds$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ então

$$f(t) \leq ke^{\int_\alpha^t g(s)ds}, \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Demonstração: Seja $\varphi(t) = k + \int_\alpha^t f(s)g(s)ds$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Tem-se $\varphi(\alpha) = k$ e $\varphi'(t) = f(t)g(t)$. Mas, por hipótese, $f(t) \leq \varphi(t)$ e com isso

$$\varphi'(t) = f(t)g(t) \leq \varphi(t)g(t)$$

Multiplicando por $e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}$ temos:

$$\left(\varphi(t)e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}\right)' \leq 0$$

Integrando em $[\alpha, t]$,

$$\varphi(t)e^{-\int_\alpha^t g(s)ds} - \varphi(\alpha) \leq 0 \Rightarrow$$

$\varphi(t) \leq \varphi(\alpha)e^{\int_\alpha^t g(s)ds}$, sendo $\varphi(\alpha) = k$ temos:

$$\varphi(t) \leq ke^{\int_\alpha^t g(s)ds}$$

■

Corolário 4.1 *O seguinte PVI para uma EDO de ordem n:*

$$\begin{cases} a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_1^0, \dot{x}(t_0) = x_2^0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $a_0(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, $t_0 \in I$, tem uma única solução definida em I.

Demonstração: Esse problema é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) = A(t)y + g(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

com

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & & & & & & \cdots & -p_1(t) \end{pmatrix}; \; g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(t) \end{pmatrix}$$

sendo $p_j(t) = \dfrac{a_j(t)}{a_0(t)}; q(t) = \dfrac{b(t)}{a_0(t)}$ e $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Para isso, basta tomar $y = (y_1, \ldots, y_n) = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$.

Pelo Teorema 4.1, existe solução $y = y(t)$ definida em I. A solução $x(t)$ do PVI para a EDO de ordem n é dada pela primeira componente da solução $y(t)$ do problema equivalente, isto é.

$$x(t) = y_1(t), \text{ onde } y = y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)).$$

4.2 Sistemas Lineares Homogêneos

Sistemas lineares homogêneos são sistemas da forma:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{20}$$

Com $A(t)$ uma matriz real $n \times n$ contínua em $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema 4.2 *Se $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t) : I \to \mathbb{R}^n$ são soluções de (20) e $c_1, c_2, \ldots, c_m$ são constantes reais, então*

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + \ldots + c_m\phi_m(t)$$

também é solução de (20) definida em I.

Demonstração:

Como $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_m(t)$ são soluções de (20) temos:

$$\phi_k'(t) = A(t)\phi_k(t) \qquad \text{para qualquer k tal que } 1 \leq k \leq m.$$

Sendo

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_m\phi_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k(t)$$

temos:

$$\phi'(t) = \left(\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k(t)\right)' = \sum_{k=1}^{m} c_k{\phi'}_k = \sum_{k=1}^{m} c_k A(t)\phi_k(t)$$

pois ${\phi'}_k(t) = A(t)\phi_k(t)$.

Com isso,

$$\phi'(t) = A(t) \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k(t) = A(t)\phi(t).$$

Isso prova que $\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_m\phi_m(t)$ é solução de (20).

Corolário 4.2 *O conjunto das soluções de (20) com as operações usuais de soma e de multiplicação por escalar é um subespaq vetorial do espaço vetorial das funções contínuas definidas em I.*

Teorema 4.3 *O espaço vetorial V das soluções de (20) tem dimensão n.*

Demonstração: Sejam $t_0 \in I$ e $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \sigma_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vetores do $\mathbb{R}^n$.

Pelo T.E.U. existem soluções $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ de (20) definidas em I, tais que:

$$\phi_1(t_0) = \sigma_1; \phi_2(t_0) = \sigma_2; \ldots; \phi_n(t_0) = \sigma_n$$

Afirmação 1: $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ é L.I. em V.

De fato, supor que existam constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que:

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = 0, \ \ \forall t \in I$$

em particular para $t = t_0$ temos

$c_1\phi_1(t_0) + \ldots + c_n\phi_n(t_0) = 0$, isto é,

$c_1\sigma_1 + \ldots + c_n\sigma_n = 0$.

Mas os vetores σ_n são L.I., logo,

$c_1 = c_2 = \ldots + c_n = 0$

e portanto, o conjunto é L.I. Logo, $\dim V \geq n$.

Afirmação 2: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ geram o espaço V.

De fato, seja $\psi \in V$, e seja $\sigma = \psi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Como $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ gera V então existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que:

$$\sigma = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \ldots + \alpha_n\sigma_n.$$

Definir $\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \ldots + \alpha_n\phi_n(t)$ com isso $\phi(t)$ é solução de (20) pois cada ϕ_i é solução. Além disso, $\phi(t_0) = \sigma$.

Pela unicidade resulta que $\phi(t) = \psi(t), \forall t \in I$, isto é,

$$\psi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) + \ldots + \alpha_n\phi_n(t), \forall t \in I$$

portanto $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ é base de V e portanto $\dim V = n$.

Definição 4.1 *Uma matriz $n \times n$ cujas colunas são soluções de (20), definidas em I é chamada uma matriz solução de (20) em I.*

Uma matriz solução de (20) em I, cujas colunas são LI, em I, é dita matriz fundamental de (20) em I.

Observação: Se E é um espaço vetorial de dimensão n, então qualquer conjunto de n vetores LI gera V.

Segue desta observação e do teorema 4.3 que se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental de (20) em I, e $\phi(t)$ é uma solução qualquer de (20) definida em I, então existe um vetor constante $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ tal que $\phi(t) = \Phi(t) \cdot c, \quad \forall t \in I$.

Teorema 4.4 *Seja $\Phi(t)$ matriz solução de (20) em I, e suponha que $det(\Phi(t_0)) \neq 0$ em algum $t_0 \in I$.*

Então, $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental de (20) em I.

Demonstração: Seja $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ as colunas de $\Phi(t)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes tais que $c_1\phi_1(t) + \ldots + c_n\phi_n t) = 0, \forall t \in I$.

Em particular temos $c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \ldots + c_n\phi_n(t_0) = 0$ ou equivalente a $\Phi(t_0) \cdot c = 0$, onde

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Como $\det\Phi(t_0) \neq 0$ temos

$$c = \Phi^{-1}(t_0) \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

isto é, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, o que implica que as colunas de $\Phi(t)$ são LI em I e portanto $\Phi(t)$ é matriz fundamental em I.

■

Teorema 4.5 *Se $\Phi(t)$ é matriz fundamental de (20) em I, então $det(\Phi(t)) \neq 0, \forall t \in I$.*

Demonstração: Seja $t_0 \in I$ fixo e supor $det(\Phi(t_0)) = 0$. Então o sistema $\Phi(t_0) \cdot c = 0$ possui pelo menos uma solução não trivial $\vec{c}$.

Considere a solução $\phi(t) = \Phi(t) \cdot c$ de (20) definida em I.

Como $\phi(t_0) = 0$ então pelo teorema de unicidade resulta que $\phi(t) = 0, \forall t \in I$, isto é, $\Phi(t) \cdot c = 0, \quad \forall t \in I$ e com isso as colunas de $\Phi(t)$ são LD em I o que é uma contradição pelo fato de $\Phi(t)$ ser matriz fundamental em I. ∎

Exemplo: Mostrar que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$ onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: $\phi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$ e $\phi_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

$$A\phi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \phi_1'(t)$$

$$A\phi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \phi_2'(t)$$

e com isso $\Phi(t)$ é matriz solução.

Agora para mostrar que $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental, temos que mostrar conforme o teorema 5.4 que $\det(\Phi(t_0)) \neq 0$, para algum t_0.

Note que $\det(\Phi(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \neq 0 \quad \forall t$. Portanto $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental em $\mathbb{R}$ associada à matriz $A = A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 4.6 *: (Fórmula de Abel) Seja $\Phi(t)$ matriz solução de (20) em I. Seja $t_0 \in I$, então:*

$$det(\Phi(t)) = det(\Phi(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} traço A(s)ds}$$

onde $traço A(s) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(s)$.

A matriz $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 1 \\ 2t & t^2 \end{bmatrix}$ não é matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$ em $I = (-1, 1)$ onde $A(t)$ é uma matriz 2×2 contínua em I.

Solução: Para a matriz $\phi(t)$ notamos que $det(\Phi(t)) = t^2e^t - 2t$ e com isso $det(\Phi(0)) = 0$. Se $\Phi(t)$ fosse matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$ então pela fórmula de Abel se teria $det(\Phi(t)) = det(\Phi(0))e^{\int_0^t \text{traço } A(s)ds} = 0, \quad \forall t \in I$. Mas $det(\Phi(1/2)) = \frac{1}{4}e^{1/2} - 1 \neq 0$.

4.3 Sistemas Lineares Não-Homogêneos

São sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias da forma:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), t \in I \tag{21}$$

com $A(t)$ matriz $n \times n$, $g(t)$ matriz $n \times 1$ contínuas em algum intervalo I e $g(t) \not\equiv 0$.

Para esse tipo de sistemas, demonstraremos a seguir a seguinte propriedade: Se $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são soluções de (21) então $\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ é solução do sistema homogêneo associado a (21.

De fato, notamos que:

$$\phi'(t) = \phi_1'(t) - \phi_2'(t) = A(t)\phi_1(t) + g(t) - (A(t)\phi_2(t) + g(t)) = A(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t)) = A(t)\phi(t), \forall t \in I$$

Com essa propriedade, podemos concluir que se $\Phi(t)$ é matriz fundamental para o sistema homogêneo associado então $\phi_1(t) - \phi_2(t) = \Phi(t)c$, para algum $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$.

Em particular, $\phi_1(t) = \phi_2(t) + \Phi(t)c, c \in \mathbb{R}^n$.

Com toda essa análise, podemos observar que qualquer solução ϕ_1 do problema não homogêneo é dado pela soma de uma solução do problema homogêneo com uma solução particular do problema não-homogêneo.

Fórmula de Variação de Parâmetros Se $\Phi(t)$ é matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ então as soluções são do tipo $\phi(t) = \Phi(t) \cdot c, c \in \mathbb{R}^n$, e, variando o parâmetro c procura-se uma solução de (21) na forma $\psi(t) = \Phi(t)v(t)$, onde $v(t)$ é um vetor coluna a ser determinado.

Substituindo $\psi(t)$ em (21) temos:

$$\Phi'(t)v(t) + \Phi(t)v'(t) = A(t)[\Phi(t)v(t)] + g(t)$$

Como $\Phi(t)$ é matriz fundamental e portanto é matriz solução, $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, o que resulta em

$$\Phi(t)v'(t) = g(t), t \in I$$

e pelo fato de $\Phi(t)$ ser fundamental então existe $(\Phi(t))^{-1}$ e com isso:

$$v'(t) = (\Phi(t))^{-1} \cdot g(t) \text{ ou seja, } v(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

portanto:

$$\psi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds, \text{ com } \psi(t_0) = 0$$

será solução de (21) se $\Phi(t)$ for matriz fundamental.

Teorema 4.7 *1: Seja $\Phi(t)$ matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ em I e $t_0 \in I$, então:*

a) $\psi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$ é única solução de $(\star)$ satisfazendo $\psi(t_0) = 0$.

b) Toda solução $\Phi(t)$ de (21) definida em I é da forma:

$$\phi(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}(\Phi(t))^{-1}(s)g(s)ds$$

sendo c o vetor constante e $\Phi(t)$ a matriz fundamental.

c) A solução $\psi(t)$ de (21) que satisfaz $\psi(t_0) = M$ é dada por:

$$\psi(t) = \Phi(t)\phi^{-1}(t_0)M + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

Demonstração:

a) Sendo $\psi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$, derivando temos:

$$\psi'(t) = \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds + \Phi\Phi^{-1}(t)g(t)$$

Sabemos que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ e com isso:

$$\psi'(t) = A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds + g(t) = A(t)\psi(t) + g(t)$$

$\forall t \in I$.

Notamos que $\psi(t_0) = \Phi(t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds = 0$. Com isso, $\psi(t)$ é solução e pela unicidade é a única solução.

b) Para provar o item b, usaremos o item a sabendo que se $\phi(t)$ é solução de $\dot{x} = A(t)x + g$ em I, então existe vetor $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi(t) - \psi(t) = \Phi(t)c, \forall t \in I$$

onde $\psi(t)$ é como no item a.

Daí:

$$\phi(t) = \Phi(t)c + \psi(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

e isto prova o item b.

c) Usando o item b, temos que se $\psi(t)$ é solução então $\psi(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$ para algum vetor constante $c \in \mathbb{R}^n$.

Mas queremos $\psi(t_0) = M$, ou seja,

$$M = \Phi(t_0)c + \int_{t_0}^{t_0}\Phi^{-1}(s)g(s)ds \Rightarrow M = \Phi(t_0)c$$

isolando c, temos $c = M\Phi^{-1}(t_0)$, portanto:

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)M + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

■

5 Teoremas de Existência e Unicidade

Para provar resultados gerais de existência e unicidade de solução de uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem precisamos da definição de espaço métrico completo, definição de contração e do teorema do ponto fixo.

As definições e o teorema estão a seguir.

Definição 5.1 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado* **a distância de** x **a** y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo $x, y, zemM$:

i) $d(x, x) = 0$

ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 5.2 *Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Definição 5.3 *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se contração se existe $k \in \mathbb{R}$ onde $0 \leq k < 1$ tal que:*

$$d'_N(f(x), f(y)) \leq k d_M(x, y), \forall x, y \in M.$$

Definição 5.4 *Um espaço métrico M é chamado completo se toda seqüência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Definição 5.5 *Seja $f : M \to M$. Um ponto fixo de f é um ponto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Teorema 5.1 *(Princípio da Contração) Seja M um espaço métrico completo e $\Phi : M \to M$.*

Vamos assumir que existe uma constante k, com $0 < k < 1$, tal que $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq kd(x, y)$, $\forall x, y \in M$.

Então existe um único ponto fixo para Φ, isto é, um ponto $x_\star \in M$ tal que $\Phi(x_\star) = x_\star$.

Além disso, se x_0 é um ponto qualquer de M então definindo $x_1 = \Phi(x_0), x_2 = \Phi(x_1), x_3 = \Phi(x_2), \ldots, x_{n+1} = \Phi(x_n), \ldots$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\star,$$

isto é, a órbita de x_0 converge para o ponto fixo.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar a existência de tal ponto e sua unicidade.

Seja $x_0 \in M$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ como dito no teorema. Se $x_1 = x_0$ então $\Phi(x_0) = x_0$ e este seria o ponto fixo.

Se $x_1 \neq x_0$ então $d(x_0, x_1) \neq 0$.

Vamos mostrar que a seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy. Temos $d(x_2, x_1) = d(\Phi(x_1), \Phi(x_0))$. Como $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq kd(x, y)$, $\forall x, y \in M$, resulta

$$d(x_2, x_1) \leq kd(x_1, x_0)$$

Temos ainda que $d(x_3, x_2) = d(\Phi(x_2), \Phi(x_1)) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$.

Usando o mesmo raciocínio "n+1" vezes, temos $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Daí, temos pela desigualdade triangular:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n)$$

Usando a estimativa acima:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \ldots + k^n) \cdot d(x_1, x_0)$$

Mas a série geométrica $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ é convergente desde que $0 < k < 1$, e por isto satisfaz o critério de Cauchy para séries. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \ldots + k^n < \frac{\epsilon}{d(x_1, x_0)}$$

para $n > N$ e p arbitrário. Logo, $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Como M é completo então $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe em M.

Chamamos tal limite de $x_\star$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\star$.

Notamos ainda que $\Phi : M \to M$ é contínua.

De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq kd(x, y) < k \cdot \frac{\epsilon}{k} \leq \epsilon$$

Então com $x_n \to x_\star$, a continuidade de Φ implica que $\Phi(x_n) \to \Phi(x_\star$. Mas, também $\Phi(x_n) = x_{n+1} \to x_\star$. Pela unicidade do limite, resulta que:

$$\Phi(x_\star) \to x_\star,$$

isto é, $x_\star$ é ponto fixo de Φ.

Finalmente, vamos provar a unicidade de tal ponto fixo.

Para isso, vamos supor que existe outro ponto fixo $y_\star$, isto é, $\Phi(y_\star) = y_\star$.

Então $d(x_\star, y_\star) = d(\Phi(x_\star), \Phi(y_\star)) \leq kd(x_\star, y_\star)$, ou seja, $(1-k)d(x_\star, y_\star) \leq 0$.

Mas $0 < k < 1$ donde temos $d(x_\star, y_\star) = 0$, ou seja, $x_\star = y_\star$ e com isso o ponto fixo é único.

■

Teorema 5.2 *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua sendo $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto.*

Vamos supor que $\dfrac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$ seja contínua em D. Então para cada $(x_0, t_0) \in D$ o PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (22)$$

possui uma única solução $\phi(t)$ definida em algum intervalo I contendo t_0.

Demonstração:

Para demonstrar o teorema 6.2, vamos transformar o PVI (22) em uma equação integral.

Mas antes, façamos a demonstração do seguinte Lema:

Lema 5.1 *Se $\phi(t)$ é solução do PVI $(\star)$ definida em I então $\phi(t)$ é solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \forall t \in I. \qquad (23)$$

Reciprocamente, se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é solução contínua de (23) então $\phi(t)$ é solução do PVI (22).

Demonstração:

Como $\phi(t)$ é solução em I de (22), temos que $\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \forall t \in I$.

Integrando de t_0 a t em ambos os lados, temos:

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \forall t \in I.$$

Como $\phi(t_0) = x_0$, temos que $\phi(t)$ é solução em I para a seguinte equação integral:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Vamos agora demonstrar a recíproca.

Para isso, seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte equação integral:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \;\; \forall t \in I.(\cdot)$$

Como $f(t,x)$ é contínua, temos que $f(s, \phi(s))$ também é contínua $\forall s \in I$ e pelo teorema fundamental do cálculo, $\phi(t)$ é diferenciável, pois é integral de uma função contínua em I.

Derivando em relação a t a equação integral temos:

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \forall t \in I$$

e portanto $\phi(t)$ é solução do PVI (22) em I.

A prova do Lema está completa. ■

Pelo lema, para achar solução do PVI (22) é suficiente achar a solução da equação (23).

Agora, vamos olhar a equação integral (23) como uma equação funcional $x = P(x)$, em um espaço de funções apropriado e aplicar o teorema do ponto fixo ou princípio da contração.

Para continuarmos com a demonstração do teorema definimos a seguinte região $R \subset D \subset \mathbb{R}^2$:

$$R = \{(t, x)/|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

ou seja, R é um retângulo fechado com centro em (t_0, x_0) contido em D.

Observação: Garantimos a existência de tal região pois D é um conjunto aberto. Para isso, possivelmente a e b devem ser pequenos e positivos.

Como $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em D, então existem constantes $M > 0$ e $k > 0$ tais que:

$$|f(t, x)| \leq M \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq k, \ \ \forall (t, x) \in R.$$

Usando o Teorema do Valor Médio, concluimos que f é Lipschitziana na variável x em R, com constante de Lipschitz k.

De fato, dados (t, x_1) e $(t, x_2) \in R \subset D$, pelo teorema do valor médio existe $\xi \in [x_1, x_2]$ tais que

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)(x_2 - x_1)$$

Como $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq k$ temos:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_2 - x_1|$$

com k independente da escolha de x_1 e x_2.

Vamos agora definir o seguinte conjunto:

$$I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \text{ com } 0 < \alpha \leq a$$

sendo que α será escolhido convenientemente.

Agora, consideramos o seguinte espaço métrico:

$$Y_\alpha = \{\phi : I_\alpha \to R/\phi(t) \text{ é contínua }, \phi(t_0) = x_0, |\phi(t) - x_0| \leq M(t - t_0), t \in I_\alpha\}$$

Usaremos neste espaço a seguinte métrica:

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup\{|\phi_1(t) - \phi_2(t)|, t \in I_\alpha\}.$$

Observação: $C(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R},\ \text{contínuas}\ \}$ é completo com a métrica d, desde que I seja um intervalo fechado e limitado.

Como desejamos que o gráfico da solução $\phi(t)$ do PVI (22) esteja em $R \subset D$, então é natural exigir que $M\alpha \leq b$.

Agora, vamos demonstrar a seguinte afirmação.

Afirmação: *O conjunto*

$$Y_\alpha = \{\phi \in C(I_\alpha, R)/|\phi(t) - x_0| \leq M(t - t_0), \phi(t_0) = x_0\}$$

com a métrica $d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$ é completo.

Demonstração: Seja $\{\phi_m(t)\}$ uma seqüência de Cauchy em I_α, então dado $\epsilon > 0, \exists\ m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup |\phi_m(t) - \phi_n(t)| = d(\phi_m, \phi_n) < \epsilon; \quad \forall\ m, n \geq m_0$$

Pelo critério de Cauchy (ver Marsden [1]), $\{\phi_m(t)\}$ converge uniformemente em I_α para algum limite $\phi(t)$, $t \in I_\alpha$.

Como ϕ_m é contínua para cada m, temos que $\phi(t)$ é contínua (para essa afirmação usamos o teorema do limite uniforme de funções contínuas, ver Marsden [1]).

Além disso, $\phi_m(t_0) = x_0, \forall m$, ou seja,

$$\phi(t_0) = \lim_{m \to \infty} \phi_m(t_0) = \lim_{m \to \infty} x_0 = x_0.$$

Finalmente, dado $\delta > 0$, seja $\tilde{m_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\phi_m(t) - \phi(t)| < \delta, \forall m \geq \tilde{m_0},\ \ \forall\ t \in I_\alpha.$$

A existência de $\tilde{m_0}$ decorre do fato de $\phi_m \to \phi$ uniformemente.

Com isso,

$$|\phi(t) - x_0| \leq |\phi(t) - \phi_{\tilde{m_0}}(t)| + |\phi_{\tilde{m_0}}(t) - x_0| < \delta + M(t - t_0)$$

Como δ é arbitrário, resulta que

$$|\phi(t) - x_0| \leq M(t - t_0).$$

Logo $\phi \in Y_\alpha$, provando que Y_α é completo.

Vamos agora definir um provável candidato a contração:

$$\begin{array}{rccc} P: & Y_\alpha & \to & C(I_\alpha, \mathbb{R}) \\ & \phi(t) & \to & P(\phi(t)) \end{array}$$

onde $P(\phi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, t \in I_\alpha$.

Com isso temos, além de P estar bem definida, que:

i) $P(Y_\alpha) \subseteq Y_\alpha$

ii) P é contração sobre Y_α se $\alpha < \frac{1}{k}$, isto é, existe $0 \leq \beta < 1$ tal que $d(P\phi_1, P\phi_2) \leq \beta d(\phi_1, \phi_2)$, $\forall \phi_1, \phi_2 \in Y_\alpha$.

Vamos provar i: Seja $\phi \in Y_\alpha$, então $P(\phi(t_0)) = x_0$ e

$$|P\phi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s))|ds \right| \leq$$

$$\leq \left| M \int_{t_0}^{t} ds \right| \leq M|t - t_0|, \forall t \in I_\alpha.$$

Usando a hipótese que $\alpha \leq \frac{b}{M}$, neste caso $(s, \phi(s)) \in R \subset \mathbb{R}^2$, para $s \in [t_0, t], t \in I_\alpha$, pois sendo $\phi \in Y_\alpha$ e $|t - t_0| \leq \alpha \leq a$ e

$$|\phi(s) - x_0| \leq M|s - t_0| \leq M\alpha \leq b, \forall t \in I_\alpha.$$

Assim, faz sentido calcular $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$ para $t \in I_\alpha$.

Naturalmente que, sendo $\phi \in Y_\alpha$ e $\phi(t)$ contínua, $P(\phi(t))$ também é contínua pela definição de $P(\phi(t))$. Logo, $P(\phi(t)) \in Y_\alpha$.

Vamos agora provar ii: Sejam $\phi_1, \phi_2 \in Y_\alpha$.

Com isso, temos:

$$|(P(\phi_1(t)) - (P(\phi_2(t))| = \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \phi_1(s) - f(s, \phi_2(s)) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))|ds \right|.$$

Usando agora o fato de que $f(t, x)$ é Lipschitz, temos:

$$|(P(\phi_1(t)) - (P(\phi_2(t))| \leq k \int_{t_0}^{t} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|ds \leq \sup |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \cdot \left| \int_{t_0}^{t} kds \right|$$

ou seja,

$$|(P(\phi_1(t)) - (P(\phi_2(t))| \leq kd(\phi_1, \phi_2)|t - t_0| \leq k\alpha d(\phi_1, \phi_2), \ \ \forall \ t \in I_\alpha.$$

Isto é, $d(P\phi_1, P\phi_2) \leq k\alpha d(\phi_1, \phi_2)$, o que prova que P é uma contração em Y_α se $k\alpha < 1$.

Portanto, pelo teorema do ponto fixo P tem um único ponto fixo $\phi(t) \in Y_\alpha$, isto é, existe $\phi(t)$ contínua tal que $\phi(t) = (P(\phi(t)) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \forall t \in I_\alpha$.

Com isso, concluimos que $\phi(t)$ é solução do PVI (22) em I_α, com α tal que $\alpha < \min\left\{a, \dfrac{1}{k}, \dfrac{b}{M}\right\}$.

■

Teorema de Existência e Unicidade (caso vetorial) *Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua onde D é um conjunto aberto tal que $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}^n$ seja contínua em D para $j = 1, 2, 3, \ldots$.*

Então, dado $(t_0, \mu) \in D$ o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases} \qquad (24)$$

possui uma única solução $\phi(t)$ definida em algum intervalo I contendo t_0.

Demonstração:

Como no caso escalar, é suficiente provar a existência e unicidade de uma solução única para a seguinte equação integral:

$$x(t) = \mu + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in I$$

Para esta demonstração vamos considerar: $B = \{(t, x)/|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, uma "caixa fechada" contida em D.

Sejam $M > 0$ e $k > 0$ tais que:

$$M = \max_B |f(t, x)| \quad \text{e} \quad k = \max_B \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x)\right|$$

Vamos demonstrar agora que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \quad \forall \ (t, x), (t, y) \in B$$

onde t é fixo.

Usando o teorema do valor médio para as componentes f_i de f, e sendo para cada $i = 1, 2, ..., n$, existe z_i no segmento $[x, y]$ tal que:

$$f_i(t, y) - f_i(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, z_i)(y_j - x_j)$$

Com isso, segue que:

$$|f(t,y)-f(t,x)| = \sum_{i=1}^{n}|f_i(t,y)-f_i(t,x)| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y_j-x_j)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,z_i)\right|\cdot|y_j-x_j| \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,z_i)\right|\right)|y_j-x_j| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,z_i)\right|\cdot|y_j-x_j|$$

Como $(t, z_i) \in B$ segue que:

$$|f(t,y)-f(t,x)| \leq \sum_{j=1}^{n} k|y_j-x_j| = k|y-x|$$

Definimos agora $I_\alpha = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ onde α é escolhido convenientemente.

Com isso, definimos $Y_\alpha = \{\phi \in C[I_\alpha, \mathbb{R}^n]/\phi(t_0)=\mu, |\phi(t)-\phi(t_0)| = |\phi(t)-\mu| \leq b\}$.

Temos que I_α é completo.

Definimos ainda

$$\begin{aligned} P: \ & Y_\alpha \to C(I_\alpha, \mathbb{R}^n) \\ & P(\phi(t)) = \mu + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds, \text{ com } t \in I_\alpha \end{aligned}$$

Portanto, temos P bem definida e:

i) $P(Y_\alpha) \subset Y_\alpha$, para α tal que $M\alpha \leq b$.

ii) P é uma contração em Y_α se $k\alpha < 1$.

As demonstrações de i, ii e de que Y_α é completo não serão feitas para o caso vetorial, pois são análogas ao caso escalar.

Portanto, para $0 < \alpha < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{k}\right\}$, o teorema do ponto fixo garante a existência de uma única $\phi : I_\alpha \to D$ contínua tal que $P(\phi(t)) = \phi(t)$, isto é,

$$\phi(t) = \mu + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds, \forall t \in I_\alpha$$

logo $\phi(t)$ é solução do PVI (24). ■

Observação 1: Os teoremas anteriores também são válidos se em lugar de pedirmos $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ contínuas, pedirmos somente que f seja Lipschitz na segunda variável.

Observação 2: Usando o teorema de Arzelá-Ascoli, se pode provar que os problemas de valor inicial (22) e (24) têm uma solução local apenas com a hipótese que f é contínua em D. (Ver Sotomayor [6]).

Referências

[1] J. Marsden, M. Hoffman; *Elementary Classical Analysis*; W. H. Freeman; 1974.

[2] C. S. Hönig; *Aplicações da Topologia à Análise*; Projeto Euclides (IMPA).

[3] F. Brauer, J.A. Nohel; *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*; W.A. Benjamin, INC, 1968.

[4] W. E. Boyce, R. C. Di Prima; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*; John Wiley, New York, 5a Edition (1992).

[5] M.W. Hirsch, S. Smale; *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*; Academic Press, 1974.

[6] J. Sotomayor; *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*; Projeto Euclides, 1979.

[7] F. Brauer, J.A Nohel; *Ordinary Differential Equations, A First Course*; W.A. Benjamin, INC, 1967.

[8] C. H. Edwards, Jr., D. E. Penney; *Equações Diferenciais Elementares*; 3 ed. Prentice - Hall, 1995.

[9] D. G. de Figueiredo, A. F. Neves; *Equações Diferenciais Aplicadas*; Coleção Matemática Universitária, IMPA. 1997.